现代数学译丛 17

合作博弈理论模型

（原书第二版）

〔罗〕Rodica Branzei
〔德〕Dinko Dimitrov 著
〔荷〕Stef Tijs

刘小冬 刘九强 译

科学出版社

现代数学译丛 17

合作博弈理论模型

（原书第二版）

〔罗〕Rodica Branzei　〔德〕Dinko Dimitrov
〔荷〕Stef Tijs　著

刘小冬　刘九强　译

科学出版社
北京

图字：01-2011-3293 号

内 容 简 介

本书研究参与者具有部分合作可能性的合作博弈理论模型，重点是模糊博弈和多选择博弈. 本书共分十二章，主要介绍了这些博弈不同的集值概念和单点解概念，这些解概念的性质，在 crisp 博弈、模糊博弈和多选择博弈的某些类上这些解概念之间的相互关系，以及这些模型在许多经济环境下的应用. 与原书第一版相比较，原书第二版增加了很多新的研究成果.

本书可作为经济、管理及数学相关专业的本科生、研究生的教材或教师的教学参考书，对相关领域的科研工作者也有重要的参考价值.

图书在版编目（CIP）数据

合作博弈理论模型（原书第二版）/（罗）布兰茨(Branzei, R.)等著；刘小冬，刘九强译. —北京：科学出版社，2011
(现代数学译丛；17)
ISBN 978-7-03-031716-2

Ⅰ.①合… Ⅱ.①布… ②刘… ③刘… Ⅲ.①合作博弈-理论模型 Ⅳ.①O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 119698 号

责任编辑：徐园园 赵彦超／责任校对：包志虹
责任印制：钱玉芬／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 7 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2011 年 7 月第一次印刷 印张：11 1/2
印数：1—2 000 字数：217 000

定价：46.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

译者序

博弈论是一门应用极其广泛的学科, 它既是一个数学分支, 又属于经济学和管理科学范畴, 其应用涉及经济学、管理学、社会学以及计算机科学等众多领域. 在过去的几十年中, 博弈论在国内外发展迅速, 既有对传统非合作博弈的突破, 更有新的理论分支, 诸如合作博弈、模糊合作博弈等的飞速发展. 然而, 虽然国际上已有许多非常出色的博弈论方面的专著, 但国内这方面的专著并不多见, 特别是有关模糊合作博弈的理论书籍还未出现. 由 Rodica Branzei, Dinko Dimitrov 和 Stef Tijs 所著的《合作博弈理论模型》(*Models in Cooperative Game Theory*) 从模型的角度系统深入地介绍了博弈论的基本理论, 尤其是书中有关模糊合作博弈的部分, 可以说是第一次系统、完整地介绍了这方面内容. 因此, 我们将这本书翻译成中文, 希望为国内的博弈论研究人员提供一本好的参考书.

本书的出版得到了西安财经学院出版基金和陕西省重点学科建设基金的资助, 谨此表示感谢!

刘小冬　刘九强
于西安财经学院
2010 年 8 月

第 二 版 序

在过去几年中, 合作博弈理论是一个有很多新成果的繁荣的研究领域. 因此, 在我们准备这本书的第二版时, 力求在不改变本书结构的前提下, 尽可能多地介绍这些新的研究成果. 首先, 这给我们提供了一个提高和扩展传统合作博弈内容的机会, 这里称为 crisp 博弈, 特别地, 具有多选择的 crisp 博弈可以使这本专著的三个部分更均衡. 其次, 借着第二版的机会, 修改和扩充了涉及合作博弈的三种模型的文献. 最后, 我们修改了第一版排版错误和一些不重要的结果, 并且, 通过修改英语格式和标点符号, 达到专著的规范性. 主要修改包括:

(1) 第 3 章增加了第 3.3 节, 关于平均字典序值 (average lexicographic value) 的知识, 它是定义在均衡 crisp 博弈上的一个新的单点解概念.

(2) 第 4 章是新增加的. 这一章从平均主义标准角度对 crisp 博弈的解概念进行了简要回顾, 第 4.2 节介绍了一个基于平均主义考虑的新的集值解概念, 即等分离集合 (equal split-off).

(3) 第 5 章基本上是对第一版第 4 章的扩充, 第 5.4 节是新增的, 它介绍的是具有 crisp 联盟的凸博弈和宗族博弈之间的关系. 另外, 第一版的第 4.2 节和另外两个模型一起放到了第 5.2 节.

(4) 第 7 章增加了第 7.3 节, 是介绍广义核心和稳定集的.

(5) 与第一版相比, 第 8 章在结构上做了小的修改, 但是内容没有变.

(6) 由于要对第 11 章和第 12 章进行增强和扩展, 所以设立了第 10 章, 它是第一版第 9 章的扩展, 同时, 对其中的符号进行了改进.

(7) 第 11 章介绍多选择博弈的解概念, 为了能更好地引进有关类–Shapley 值的新内容, 这一章的结构有所改变. 第 11.4 节是新增的, 它包含了关于 crisp 博弈的等分离集合的多选择版本 (参见第 4.2 节).

(8) 第 12 章来源于第一版的第 11 章, 包含一些关于均衡博弈、凸博弈和宗族博弈这三类多选择博弈的新的概念和结论. 特别地, 第 12.1.2 小节介绍了水平增加单调分配方案 (level-increase monotonic allocation scheme) 的概念, 它是多选择博弈完全均衡存在的必要条件. 第 12.2 节几乎是全新的. 其中, 第 12.2.2 小节是全新的, 介绍的是凸多选择博弈的单调分配方案. 第 12.2.3 小节也是全新的, 介绍和研究了凸 crisp 博弈的受限平等解 (constrained egalitarian solution) 的多选择版本 (参见第 5.2.3 节). 而第 12.2.4 节主要介绍具有多选择联盟的凸博弈的所有前面介绍的解的性质. 第 12.3 节是全新的. 首先, 第 12.3.1 节介绍了多选择宗族博弈和多

选择完全宗族博弈, 提供了多选择完全宗族博弈的特征. 其次, 第 12.3.2 节介绍和研究了多选择完全宗族博弈的一个子类的双单调分配方案 (bi-monotonic allocation scheme), 此节定义的补偿-分享规则 (compensation-sharing rule) 有重要作用.

希望这次的修正和扩充版本能够使读者获得比第一版更多的收益. 由衷地感谢 Katharina Wetzel-Vandai, 他鼓励我们准备 Springer 2005 版的第二版; 由衷地感谢 Luis G. González Morales, 是她将我们的手稿整理成最后的书稿.

Rodica Branzei
Dinko Dimitrov
Stef Tijs
Nijmegen
2008 年 1 月

第 一 版 序

这本书研究具有转移效用合作博弈 (TU–博弈) 的传统模型, 以及参与者具有部分合作可能性的合作博弈模型, 我们称为模糊博弈和多选择博弈. 在一个合作 TU–博弈中, 参与者要么全部与其他参与者合作, 要么这些参考者全部不与其他参与者合作. 然而在模糊博弈中, 参与者允许以无限多的不同参与水平与其他参与者合作, 从不合作到完全合作. 一个多选择博弈描述一个 "中间" 情形, 即每个参与者可以有固定的有限个数的参与水平.

本书的第一部分将主要精力放在合作博弈理论中最成熟的模型, 即具有特征函数形式的合作博弈或具有转移效用的合作博弈 (TU–博弈), 这里称之为具有 crisp 联盟的合作博弈, 或简单地称之为 crisp 博弈. 本部分介绍了基本概念、解概念和合作 crisp 博弈的分类. 这样, 读者可以将这一部分作为研究模糊博弈 (第二部分) 和多选择博弈 (第三部分) 的对应概念的参考工具书.

这本书的工作起源于 2002 年, 当时我们作为研究伙伴参与在 ZiF (比勒费尔德) 的一个叫 "Procedural Approaches to Conflict Resolution" 的项目. 感谢我们的东道主 Matthias Raith 和 Olaf Gaus, 是他们给我们创造了自主制定研究计划的条件; 也要感谢 ZiF 的行政管理官员们, 感谢他们的殷勤和好客. Dinko Dimitrov 的工作得到了蒂尔堡大学 (Tilburg University) 管理的欧洲共同体项目的 Marie Curie 研究基金的慷慨资助, 该项目名称是 "Improving the Human Research Potential and the Socio-Economic Knowledge Base", 合约编号为 HPMF-CT-2002-02121. 同时要感谢 Luis G. Gonzalez Morales, 是她将我们的手稿整理成这最终的版本.

Rodica Branzei
Dinko Dimitrov
Stef Tijs
Tilburg
2005 年 5 月

目　　录

第二部分 具有模糊联盟的合作博弈

第三部分 多选择博弈

第一部分　具有 crisp 联盟的合作博弈

合作博弈理论主要关心的是联盟 (即参与者集合), 协调他们的行动并且经营他们的收益. 因此, 这里遇到的问题之一是如何在组成联盟的成员之间分配他们的额外收益 (或费用节省 (cost savings)). 这个理论的基础是基于 John von Neumann 和 Oskar Morgenstern 建立的具有特征函数的合作博弈[78], 也就是著名的具有转移效用的博弈 (TU–博弈). 自那以后, 合作 TU–博弈产生了很多解概念, 同时也产生了一些有趣的 TU–博弈的子类. 这一部分介绍一些挑选过的基本记号、解概念和合作 TU–博弈类, 这些概念将在本书的后两部分广泛用到. 介绍 (合作) 博弈更详细的著作如 [86] 和 [110], 其中也涉及非转移支付博弈 (NTU–博弈). 最新的专题讨论文献有 [79], [87], [91], [123].

本书的这一部分主要介绍合作博弈理论的最成熟的模型, 即具有特征函数形式的合作博弈或具有转移效用的合作博弈 (TU-博弈), 这里称这些模型为具有 crisp 联盟的合作博弈, 或简称为 crisp 博弈. 这部分是这样构成的：第 1 章介绍涉及 TU–博弈的合作博弈的基本符号、定义和概念; 第 2 章考虑核心 (core)、优势核心 (dominance core) 和稳定集 (stable set) 等的集值解概念以及不同的核心捕捉器的概念, 并对这些解概念之间的关系进行了广泛地研究. 第 3 章主要涉及两个著名的单点解概念 ——Shapley 值和 τ 值, 也介绍了文献 [111] 新近引入的平均字典序值 (average lexicographic value) 的概念. 我们介绍了这些概念的不同形式, 讨论了它们的一些性质和公理. 在第 4 章中简要地介绍了基于平等主义的解概念 (egalitarianism-based solution concept), 介绍了合作博弈的等分离集合 (equal split-off set). 第 5 章研究了具有 crisp 联盟的合作博弈的三种类型：完全均衡博弈 (totally balanced game)、凸博弈 (convex game) 和宗族博弈 (clan game). 讨论了这些模型的解概念具有的一些特殊性质, 这些解概念在第 3, 4 章中有所介绍. 同时, 给出其他特别的解概念, 例如, 完全均衡博弈的人口单调分配机制 (population monotonic allocation scheme), 凸博弈的受限平等解 (constrained egalitarian solution), 以及宗族博弈的双单调分配机制 (bi-monotonic allocation scheme).

第 1 章　研 究 基 础

令 N 是参与者 (这些参与者考虑不同的合作可能性) 的非空有限集合, 每个子集 $S \subset N$ 看成是一个 crisp 联盟 (crisp coalition). 集合 N 称为大联盟 (grand coalition), 集合 $\varnothing$ 称为空联盟 (empty coalition). 将联盟的集合, 即 N 的所有子集用 2^N 表示. 对每个 $S \in 2^N$, 用 $|S|$ 表示 S 中元素的个数, 用 e^S 表示 S 的特征向量, 其中

$$\begin{cases} \left(e^S\right)^i = 1, & \text{如果 } i \in S, \\ \left(e^S\right)^i = 0, & \text{如果 } i \in N \backslash S. \end{cases}$$

在后面常记 $N = \{1, \cdots, n\}$.

定义 1.1　具有特征函数形式的**合作博弈**是一个序对 $\langle N, v\rangle$, 其中 N 为参与者集合, $v: 2^N \to \mathbb{R}$ 是满足 $v(\varnothing) = 0$ 的特征函数.

实值函数 $v(S)$ 可以解释为当 S 合作时 S 的成员可以获得的最大收益或可节省的最多费用. 通常认定博弈 $\langle N, v\rangle$ 具有特征函数 v.

具有特征函数形式的合作博弈通常解释为可转移支付博弈 (TU–博弈). 合作博弈可能是非转移支付的 (NTU–博弈), 读者可以参考文献 [87] 和 [110] 中关于 NTU–博弈的介绍.

例 1.2(手套博弈)　假设 $N = \{1, \cdots, n\}$ 可以分成两个不相交的子集 L 和 R. L 中的成员拥有左手手套, R 中的成员拥有右手手套. 单个手套没有任何价值, 一对左右手手套具有一欧元的价值. 这种情况可以建立一个博弈模型 $\langle N, v\rangle$, 其中对每个 $S \in 2^N$ 有 $v(S) := \min\{|L \cap S|, |R \cap S|\}$.

具有参与者集合 N 的合作博弈的特征函数的集合记为 G^N, 若在其上定义通常意义的加法和数乘, 则 G^N 形成一个 $\left(2^{|N|} - 1\right)$ 维的线性空间; 由无异议博弈 (unanimity game) u_T 可以确定此空间的一个基, 其中 $T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, u_T 定义为

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } S \subset T \text{ ①}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{1.1}$$

容易验证对每个 $v \in G^N$, 有

$$v = \sum_{T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} c_T u_T, \quad \text{其中}, \quad c_T = \sum_{S: S \subset T} (-1)^{|T| - |S|} v(S). \tag{1.2}$$

① 注: 原书中为 $T \subset S$, 译者注.

无异议博弈 u_T 可以这样解释: 可以获得利润 (或节省费用) 为 1 当且仅当联盟 S 中的成员协同合作.

定义 1.3 博弈 $v \in G^N$ 称为**简单的**①, 如果对所有的 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$ 有 $v(S) \in \{0,1\}$, 并且 $v(\varnothing)=0$, $v(N)=1$.

可以看到, 对所有 $T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 无异议博弈 u_T 是一个特殊的简单博弈.

定义 1.4 在简单博弈 $v \in G^N$ 中, 如果 $v(S)=1$, 则称联盟 S 为**获胜的** (winning).

定义 1.5 在简单博弈 $v \in G^N$ 中, 如果一个联盟 S 满足 $v(S)=1$, 并且对所有 $T \subset S, T \neq S$, 都有 $v(T)=0$, 则称 S 为**最小获胜的** (minimal winning).

定义 1.6 在简单博弈 $v \in G^N$ 中, 如果联盟 $\{i\}$ 是最小获胜的, 同时没有其他最小获胜联盟, 则称参与者 $i \in N$ 为**独裁者** (dictator).

定义 1.7 令 $v \in G^N$, 对每个 $i \in N$ 和每个满足 $i \in S$ 的每个 $S \in 2^N$, 参与者 i 对联盟 S 的**边际贡献** (marginal contribution) 是 $M_i(S,v) := v(S) - v(S\backslash \{i\})$.

令 $\pi(N)$ 是 N 的所有置换 $\sigma: N \to N$ 的集合, 集合 $P^\sigma(i) := \{r \in N | \sigma^{-1}(r) < \sigma^{-1}(i)\}$ 含有关于置换 σ 的所有 i 的前继.

定义 1.8 令 $v \in G^N$ 和 $\sigma \in \pi(N)$. 关于 σ 和 v 的**边际贡献向量** $m^\sigma(v) \in \mathbb{R}^n$, 定义为对所有 $i \in N$, $m^\sigma(v)$ 的第 i 个分量为 $m_i^\sigma(v) := v(P^\sigma(i) \cup \{i\}) - v(P^\sigma(i))$.

下面, 在不至于混淆 v 是博弈的情况下, 常用 m^σ 代替 $m^\sigma(v)$.

定义 1.9 对于一个博弈 $v \in G^N$ 和一个联盟 $T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 关于参与者集合 T 的**子博弈** v_T 定义为, 对所有 $S \in 2^T$, $v_T(S) := v(S)$.

这里, v_T 是一个将 v 限制在集合 2^T 上的博弈.

定义 1.10 博弈 $v^* \in G^N$ 称为是 $v \in G^N$ 的**对偶**, 如果对所有的 $S \subseteq N$, 有 $v^*(S) = v(N) - v(N\backslash S)$.

定义 1.11 博弈 $v \in G^N$ 称为是**单调的**, 如果对所有满足 $S \subset N$ 的 $S,T \in 2^N$, 有 $v(S) \leqslant v(T)$.

定义 1.12 博弈 $v \in G^N$ 称为是**非负的**, 如果对每个 $S \in 2^N$, 有 $v(S) \geqslant 0$.

定义 1.13 博弈 $v \in G^N$ 称为是**可加的**, 如果对所有满足 $S \cap N = \varnothing$ 的 $S,T \in 2^N$, 有 $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$.

可加的博弈 $v \in G^N$ 可由下列向量确定

$$a = (v(\{1\}), \cdots, v(\{n\})) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

因为对所有 $S \in 2^N$, $v(S) = \sum_{i \in S} a_i$. 可加博弈形成了一个 n 维线性空间 G^N. 博弈 $v \in G^N$ 称为是**非本质的** (inessential), 如果它是一个可加博弈. 对于一个非本质的

① 在某些博弈文献中, 一个博弈是简单的, 如果它是单调可加的 (参见定义 1.11).

博弈, 如何分配 $v(N)$ 是不需要讨论的, 因为 $v(N)=\sum_{i\in N}v(\{i\})\Big($并且对所有的$S\subset N$也有$v(S)=\sum_{i\in S}v(\{i\})\Big)$①.

现实中很多的合作博弈都是超可加性博弈.

定义 1.14　博弈 $v\in G^N$ 称为是**超可加的**, 如果对所有满足 $S\cap N=\varnothing$ 的 $S,T\in 2^N$, 有 $v(S\cup T)\geqslant v(S)+v(T)$.

定义 1.15　博弈 $v\in G^N$ 称为是**次可加的** (subadditive), 如果 $-v$ 是超可加的.

当然, 在一个超可加博弈中, 如果 $S_1,\cdots,S_k$ 是两两不相交的联盟, 则有 $v\Big(\bigcup_{i=1}^{k}S_i\Big)\geqslant\sum_{i=1}^{k}v(S_i)$. 尤其, 对每个 N 的分割 $(S_1,\cdots,S_k)$ 有 $v(N)\geqslant\sum_{i=1}^{k}v(S_i)$; 特别地, $v(N)\geqslant\sum_{i=1}^{n}v(i)$ 成立. 注意: 例 1.2 中的博弈满足超可加性. 对于一个满足超可加性的博弈, 合作对参与者来讲是有利的. 具有超可加性博弈 (的特征函数) 的集合在 G^N 中形成一个锥 (cone), 也就是说, 对于所有具有超可加性的博弈 v, w, $\alpha v+\beta w$ 也是具有超可加性的博弈, 其中, α, $\beta\in\mathbb{R}_+$.

定义 1.16　满足性质 $v(N)>\sum_{i=1}^{n}v(i)$ 的博弈 $v\in G^N$ 称为是 ***N*-本质博弈** (N-essential game).

在第一部分中, 均衡博弈概念起着重要作用.

定义 1.17　映射 $\lambda: S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}\to\mathbb{R}_+$ 称为**均衡映射**, 如果 $\sum_{S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}}\lambda(S)e^S=e^N$.

定义 1.18　联盟集合 B 称为是**均衡的**, 如果存在一个均衡映射 λ 使得 $B=\{S\in 2^N|\lambda(S)>0\}$.

定义 1.19　博弈 $v\in G^N$ 称为是**均衡的**, 如果对任意的均衡映射 $\lambda: S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}\to\mathbb{R}_+$, 都有

$$\sum_{S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}}\lambda(S)v(S)\leqslant v(N). \tag{1.4}$$

现在考虑两个博弈 $v,w\in G^N$, 并回答 "什么时候我们说博弈 v 和 w '本质上 (essentially)' 是相同的? " 这样一个问题.

定义 1.20　令 $v,w\in G^N$. 博弈 w 和博弈 v 是**策略等价的** (strategically equivalent), 如果存在 $k>0$ 和一个可加博弈 a (参见 (1.3) 式) 使得对所有$S\in$

---

① 给定一个博弈 $v\in G^N$ 和一个联盟 $\{i,\cdots,k\}\subset N$, 常用 $v(i,\cdots,k)$ 替代 $v(\{i,\cdots,k\})$.

$2^N\setminus\{\varnothing\}$ 都有 $w(S)=kv(S)+\sum\limits_{i\in S}a_i$.

可以认为 w 是由 v 通过下列变换得到的:

- 支付的单位变了, 其中的变换比率为 k;
- 在博弈 w 中, 在参与者分配 $kv(N)$ 之前, 每个参与者或者先分到一份红利 (如果 $a_i>0$), 或者先交纳一定费用 (如果 $a_i<0$).

注意, 策略等价是集合 G^N 上的等价关系, 也就是说, 有

- (反身性) 博弈 v 和它自己是策略等价的 (对每个 $i\in N$ 取 $k=1$ 和 $a_i=0$);
- (对称性) 如果博弈 w 和博弈 v 是策略等价的, 则博弈 v 和博弈 w 也是策略等价的 $\Big($如果对所有联盟 $S\subset N$, $w(S)=kv(S)+\sum\limits_{i\in S}a_i$, 则 $v(S)\dfrac{1}{k}w(S)-\sum\limits_{i\in S}\dfrac{a_i}{k}$, 其中 $\dfrac{1}{k}>0\Big)$;
- (传递性) 如果 w 和 v 是策略等价的, u 和 w 是策略等价的, 则 u 和 v 是策略等价的 $\Big(w(S)=kv(S)+a(S)$, $u(S)=lw(S)+b(S)$, 蕴含 $u(S)=lkv(S)+(la(S)+b(S))$, 其中 $a(S):=\sum\limits_{i\in S}a_i\Big)$.

对于很多解概念, 正如后面将会看到的, 只需讨论策略等价博弈类中的一个博弈. 常考虑具有 (α,β) 形式的策略等价类博弈, 其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

定义 1.21 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 博弈 $v\in G^N$ 称为是 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ **形式的博弈**, 如果对所有 $i\in N$, $v(i)=\alpha$, 且 $v(N)=\beta$.

定理 1.22 每个 N-本质博弈 $v\in G^N$ 策略等价于一个具有 $(0,1)$ 形式的博弈 $w\in G^N$, 且这个博弈是唯一的.

证明 对某个 $k>0$ 和 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, 寻找一个博弈 w 满足性质: 对所有 $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, 有 $w(S)=kv(S)+a(S)$ 成立, 同时对所有 $i\in N$, 有 $w(\{i\})=0$ 和 $w(N)=1$. 那么, 必然有

$$w(i)=0=kv(i)+a_i, \tag{1.5}$$

$$w(N)=1=kv(N)+\sum_{i\in N}a_i. \tag{1.6}$$

由 (1.5) 式和 (1.6) 式, 得到 $w(N)-\sum\limits_{i\in N}w(i)=1=k\left(v(N)-\sum\limits_{i\in N}v(i)\right)$. 因此, $k=\dfrac{1}{v(N)-\sum\limits_{i\in N}v(i)}$. 再由 (1.5) 式导出 $a_i=-\dfrac{v(i)}{v(N)-\sum\limits_{i\in N}v(i)}$. 如果对任何 $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, 取 $w(S)=\dfrac{v(S)-\sum\limits_{i\in S}v(i)}{v(N)-\sum\limits_{i\in N}v(i)}$, 那么, 得到唯一的 $(0,1)$ 形式的博弈 w,

它与 v 是策略等价的.

定义 1.23　博弈 $v \in G^N$ 称为是 **0–规范化的** (zero-normalized), 如果对所有 $i \in N$, 都有 $v(i) = 0$.

容易验证, 每个博弈 $v \in G^N$ 都与其 0–规范化的博弈 $w \in G^N$ 是策略等价的, 其中 $w(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$.

定义 1.24　博弈 $v \in G^N$ 称为是 **0–单调性的**, 如果它的 0–规范化博弈是单调的.

可以证明, 与 0–单调性策略等价的博弈也是 0–单调性的.

现在讨论合作 TU–博弈的一个基本问题: “如果大联盟形成, 如何分配收益或费用节省 $v(N)$? ”

解决这个问题要依赖于一些合作博弈的解概念, 例如, 核心、稳定集、谈判集、Shapley 值、τ 值和核仁. 一个解概念给出一个回答这个问题的答案, 即当 N 中所有参与者合作时所获得的收益 (费用节省), 如何在个体参与者之间进行分配, 同时这个分配要考虑所有参与者形成不同联盟时可能存在的潜在收益 (费用节省). 因此, 一个解概念分配给一个合作博弈至少一个支付向量 $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$, 其中 x_i 是分配给参与者 $i \in N$ 的支付. 这本书中用到的关于解概念 (集值解和单点解) 的选择、有关它们的公理以及这些解之间的关系, 将在第 2~4 章讨论.

定义 1.25　一个**集值解** (set-valued solution) (或一个多值解 (multisolution)) 是一个多元函数 $F : G^N \to\to \mathbb{R}^n$.

定义 1.26　一个**单点解** (one-point solution) (或一个单值规则 (single-valued rule)) 是一个映射 $f : G^N \to \mathbb{R}^n$.

现在讨论一些单点解概念的性质, 也可以将这些性质推广到集值解概念上.

定义 1.27　令 $f : G^N \to \mathbb{R}^n$, 则 f 满足

(i) **个体合理性** (individual rationality) 对所有的 $v \in G^N$ 和 $i \in N$, 有 $f_i(v) \geqslant v(i)$.

(ii) **有效性** (efficiency) 对所有的 $v \in G^N$, 有 $\sum_{i=1}^{n} f_i(v) = v(N)$.

(iii) **关于策略等价的相对不变性** (relative invariance with respect to strategic equivalence) 对所有的 $v, w \in G^N$, 所有的可加博弈 $a \in G^N$, 以及所有的 $k > 0$, 都有 $w = k\,v + a$ 蕴含 $f(k\,v + a) = k\,f(v) + a$.

(iv) **虚拟参与者性质** (the dummy player property) 对所有的 $v \in G^N$ 和所有 v 中的虚拟参与者 (dummy players) i, 都有 $f_i(v) = v(i)$, 也就是说, 参与者 $i \in N$ 对所有的 $S \in 2^{N \setminus \{i\}}$, 都满足 $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i)$.

(v) **匿名性质** (the anonymity property) 对所有的 $\sigma \in \pi(N)$, 有 $f(v^\sigma) = \sigma^*(f(v))$. 这里博弈 v^σ 满足, 对所有的 $U \in 2^N$ 都有 $v^\sigma(\sigma(U)) := v(U)$, 或对所有的 $S \in 2^N$ 和 $\sigma^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 有 $v^\sigma(S) := v(\sigma^{-1}(S))$, 其中 σ^* 由下式定义: 对

所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in N$ 有 $(\sigma^*(x))_{\sigma(k)} := x_k$.

(vi) **可加性** (additivity) 对所有的 $v, w \in G^N$ 有 $f(v+w) = f(v) + f(w)$ 成立.

在结束这章之前, 我们回顾一下后面要用到的线性代数的一些定义和结果.

定义 1.28 V 和 W 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, $L: V \to W$ 是一个映射, 则称 L 是从 V 到 W 的**线性变换** (线性映射、线性算子), 如果对所有的 $x, y \in V$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 都有 $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$.

定义 1.29 称集合 W 是向量空间 V 的 (线性) **子空间**, 如果 $W \subset V, 0 \in W$, 并且 W 关于加法和数乘是封闭的, 也就是说, 对所有的 $x, y \in W$, 有 $x + y \in W$, 对每个 $x \in W$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有 $\alpha x \in W$ 成立.

定义 1.30 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 V 的子集 C 称为是**凸**的, 如果对所有的 $x, y \in C$ 和 $\alpha \in (0,1)$, 都有 $\alpha x + (1-\alpha) y \in C$ 成立.

凸集的几何解释是: 集合中的每一对点 x 和 y, 以 x 和 y 为端点的线段也属于这个集合.

定义 1.31 C 是凸集, 点 $x \in C$ 称为 C 的**极点**, 如果不存在满足 $x_1 \neq x$ 和 $x_2 \neq x$ 的 $x_1, x_2 \in C$ 和 $\alpha \in (0,1)$, 使得 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ 成立. 凸集 C 的极点集合记为 $\operatorname{ext}(C)$.

定义 1.32 $\mathbb{R}^n$ 上点集 H 称为**超平面**, 如果它是线性方程 $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ 的解集合, 其中 $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$. 一个超平面将一个 (线性) 空间分成两个 (线性) 半空间. 令 A 是一个 $n \times p$ 矩阵, $b \in \mathbb{R}^p$, 集合 $P = \{x \in \mathbb{R}^n | x^{\mathrm{T}} A \geqslant b^{\mathrm{T}}\}$ 称为**多面体集合** (polyhedral set).

下面的定理给出了多面体集合极点的描述.

定理 1.33 A 是一个 $n \times p$ 矩阵, $b \in \mathbb{R}^p$, P 是不等式 $x^{\mathrm{T}} A \geqslant b^{\mathrm{T}}$ 解的多面体集合, 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 令 $\operatorname{tight}(x)$ 是 A 的列 $\{Ae^j | x^{\mathrm{T}} Ae^j = b_j\}$ 的集合, e^j 是 $\mathbb{R}^n$ 中的第 j 个标准基向量, $j \in N$. 则 x 是 P 的极点当且仅当 $\operatorname{tight}(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的完备向量系统.

下一个定理是线性规划理论中著名的对偶定理.

定理 1.34 A 是一个 $n \times p$ 矩阵, $b \in \mathbb{R}^p$, $c \in \mathbb{R}^n$, 那么 $\min\{x^{\mathrm{T}} c | x^{\mathrm{T}} A \geqslant b^{\mathrm{T}}\} = \max\{b^{\mathrm{T}} y | Ay = c, y \geqslant 0\}$, 如果 $\{x \in \mathbb{R}^n | x^{\mathrm{T}} A \geqslant b^{\mathrm{T}}\} \neq \varnothing$ 以及 $\{y \in \mathbb{R}^p | Ay = c, y \geqslant 0\} \neq \varnothing$ 同时成立.

定义 1.35 V 是一个向量空间, $A \subset V$, A 的**凸包** (convex hull) $\operatorname{co}(A)$ 定义为集合:

$$\left\{x \in V \middle| \exists p \in \mathbb{N},\ \alpha \in \Delta^p,\ v_1, \cdots, v_p \in A, \text{使得 } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = x\right\},$$

其中 $\Delta^p = \left\{q \in \mathbb{R}_+^p \middle| \sum_{i=1}^{p} q_i = 1\right\}$ 是 $(p-1)$ 维单位单纯形.

第 2 章　核心和相关解概念

这一章考虑支付向量 $x=(x_i)_{i\in N}\in\mathbb{R}^n$, 其中 x_i 是在大联盟可以建立合作的条件下给参与者 $i\in N$ 的支付. 很明显, 大联盟的实际形成是建立在所有参与者对博弈中的建议支付都同意的基础之上的. 这样的建议支付考虑了参与者所有可能的合作以及这些合作对应的支付.

2.1　转归、核心和稳定集

首先, 注意到在博弈 $v\in G^N$ 中, 只有满足 $\sum\limits_{i\in N}x_i\leqslant v(N)$ 的支付向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 是可达到的, 并且这样的支付向量的集合是非空的和凸的. 更精确一些, 它是 $\mathbb{R}^n$ 的半空间. 用 $I^{**}(v)$ 记这样的集合, 即

$$I^{**}(v):=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|\sum_{i\in N}x_i\leqslant v(N)\right\}.$$

但是, 一个支付向量应该满足有效性才有可能被同意, 即

$$\sum_{i\in N}x_i=v(N).$$

为了扩展有效性条件, $\sum\limits_{i\in N}x_i\geqslant v(N)$ 也应该成立.

假定 $\sum\limits_{i\in N}x_i<v(N)$, 则应有

$$a=v(N)-\sum_{i\in N}x_i>0.$$

那么参与者仍然可以组成大联盟, 并且可以获得更好的支付向量 $y=(y_1,\cdots,y_n)$, 其中 $y_i=x_i+\dfrac{a}{n}$, $i\in N$.

记 $I^*(v)$ 为合作博弈 $v\in G^N$ 的有效支付向量集合, 即

$$I^*(v):=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|\sum_{i\in N}x_i=v(N)\right\}.$$

很明显, $I^*(v)\neq\varnothing$. 将这个凸集看做是博弈 $v\in G^N$ 的预转归集合, 它是 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面. 显然, $I^*(v)\subset I^{**}(v)$.

注意到, 如果建议的分配 $x \in I^*(v)$, 至少存在一个参与者 $i \in N$ 的支付 x_i 满足 $x_i < v(i)$, 则大联盟不可能形成. 原因是这样的参与者宁愿选择不参加合作, 因为他自己独立做会获得更多收益.

因此, 在博弈中, 若想实现一个支付向量, 则个体合理性条件

$$x_i \geqslant v(i), \text{ 对所有 } i \in N$$

应该成立.

定义 2.1 称博弈 $v \in G^N$ 的支付向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 是一个**转归**, 如果它满足有效性和个体合理性, 即

(i) $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$;

(ii) 对所有的 $i \in N$, $x_i \geqslant v(i)$ 成立.

记 $I(v)$ 为博弈 $v \in G^N$ 的转归集. 易见, $I(v)$ 为空集当且仅当 $v(N) < \sum_{i \in N} v(i)$. 进一步, 对一个可加博弈 (参见定义 1.13)

$$I(v) = \{(v(1), \cdots, v(n))\}.$$

下一个定理告诉我们, N-本质博弈 (参见定义 1.16) 总有无穷多个转归. 并且 $I(v)$ 是一个具有极点 $f^1(v), \cdots, f^n(v)$ 的单纯形, 其中, 对每个 $i \in N$, $f^i(v) = \left(f_1^i(v), \cdots, f_n^i(v)\right)$, 这里

$$f_j^i(v) = \begin{cases} v(i), & \text{如果 } i \neq j, \\ v(N) - \sum_{k \in N \setminus \{i\}} v(k), & \text{如果 } i = j. \end{cases} \tag{2.1}$$

定理 2.2 $v \in G^N$, 若博弈 v 是 N-本质的, 则

(i) $I(v)$ 是无限集;

(ii) $I(v)$ 是点 $f^1(v), \cdots, f^n(v)$ 的凸包.

证明 (i) 因为 $v \in G^N$ 是一个 N-本质博弈, 所以有 $a = v(N) - \sum_{i \in N} x_i > 0$. 对任何满足 $\sum_{i \in N} b_i = a$ 的非负 n 元组 $b = (b_1, \cdots, b_n)$, 若对每一个 $i \in N$, 设 $x'_i = v(i) + b_i$, 则支付向量 $x' = (x'_1, \cdots, x'_n)$ 是一个转归.

(ii) 这个结论可以直接由定理 1.33 得到, 只要注意到 $I(v) = \{x \in \mathbb{R}^n | x^{\mathrm{T}} A \geqslant b^{\mathrm{T}}\}$, 其中 A 是一个列为 $e^1, \cdots, e^n, 1^n, -1^n$ 的 $n \times (n+2)$ 矩阵, 并且

$$b = (v(1), \cdots, v(n), v(N), -v(N)),$$

这里, 对每个 $i \in N$, e^i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的第 i 个标准基, 1^n 是 $\mathbb{R}^n$ 中所有元素为 1 的向量.

从上面定理可以看出, N–本质博弈的转归集太大, 有必要制定一些标准用来挑选这些最有可能出现的转归. 因此, 可以获得 $I(v)$ 的一些子集作为解概念.

首先要研究的 (集值) 解概念是博弈的核心[52].

定义 2.3　博弈 $v \in G^N$ 的**核心** $C(v)$ 是集合

$$C(v) = \left\{ x \in I(v) \middle| \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S),\ \text{对所有}\ S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}\ \text{成立} \right\}.$$

如果 $x \in C(v)$, 当 x 作为 N 中收益的建议支付时, 则没有联盟 S 有分裂的动机, 因为分配给 S 的总量 $\sum_{i \in S} x_i$ 不小于 $v(S)$, 而 $v(S)$ 是 S 的参与者形成子联盟可以获得的量. 如果 $C(v) \neq \varnothing$, 则核心 $C(v)$ 中的元素可以很容易借助于线性不等式的一个有限系统获得. 核心是一个多面体 (polytope).

在文献 [16] 和 [103] 中可以找到关于非空核心博弈的描述, 这些内容将在定理 2.4 中叙述.

定理 2.4　令博弈 $v \in G^N$, 则下列两个断言是等价的:

(i) $C(v) \neq \varnothing$;

(ii) 博弈 v 是均衡的 (参见定义 1.19).

证明　首先注意到 $C(v) \neq \varnothing$ 当且仅当

$$v(N) = \min \left\{ \sum_{i \in N} x_i \middle| \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S), \text{对所有}\ S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}\ \text{成立} \right\}. \tag{2.2}$$

由定理 1.34 知, (2.2) 式成立当且仅当

$$v(N) = \max \left\{ \sum_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} \lambda(S) v(S) \middle| \sum_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} \lambda(S) e^S = e^N,\ \lambda \geqslant 0 \right\}. \tag{2.3}$$

(取矩阵 A 的列为特征向量 e^S). 现在, (2.3) 式成立当且仅当 (1.4) 式成立, 因此, (i) 和 (ii) 是等价的.

现在, 重新用几何术语来描述 Bondareva-Shapley 的结果[26]. 令 $I(v) = \Delta(N, v)$ 的子单纯形为 $\Delta(S, v) = \operatorname{conv}\left\{ f^i(v) \,|\, i \in S \right\}$, 重心 $\frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} f^i(v)$ 用 $b(S, v)$ 表示. 则得到下面的关于非空核心博弈的性质.

定理 2.5　博弈 $v \in G^N$ 的核心非空当且仅当在 $\mu_S \geqslant 0$ 和 $\sum_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} \mu_S = 1$ 时, $\sum_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} \mu_S b(S, v) = b(N, v)$ 蕴含 $\sum_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} \mu_S \frac{v(S)}{|S|} \leqslant \frac{v(N)}{|NN|}$.

证明 对 $\lambda=(\lambda_S)_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}$, 令 $\mu=(\mu_S)_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}$, 其中 $\mu_S=n^{-1}|S|\lambda_S$, 则 $\lambda_S\geqslant 0$ 及 $\sum\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\lambda_S e^S=e^N$ 成立当且仅当

$$\sum_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\mu_S\frac{e^S}{|S|}=\frac{e^N}{|N|},\quad \mu_S\geqslant 0,\quad \sum_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\mu_S=1.$$

这蕴含着

(i) $\lambda_S\geqslant 0$ 及 $\sum\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\lambda_S e^S=e^N$成立当且仅当 $\sum\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\mu_S\, b(S,vS,v)=b(N,v)$ 成立, 因为对每个 $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, $b(S,v)=(v(\{1\}),v(\{2\}),\cdots,v(\{n\}))+\alpha|S|^{-1}e^S$, 其中, $\alpha=v(N)-\sum\limits_{i\in N}v(\{i\})$.

(ii) $\sum\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\lambda_S v(S)\leqslant v(N)$ 成立当且仅当 $\sum\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\mu_S\frac{v(S)}{|S|}\leqslant\frac{v(N)}{|N|}$.

这个定理说明, 一个博弈 $v\in G^N$ 核心非空, 当且仅当对于每一个将转归集的重心表示为子单纯形重心凸组合的方法, N 的人均值 $v(N)/|N|$ 至少与子联盟 S 的人均值 $(v(S)/|S|)$ 对应的凸组合一样大.

注释 2.6 核心是关于策略等价性的相对不变式 (参见定义 1.27 (iii)): 如果 $w\in G^N$ 与 $v\in G^N$ 策略等价, 即 $w=kv+a$, 则

$$C(w)=k\,C(v)+a\ \left(:=\left\{x\in\mathbb{R}^n|x=ky+a,\ \text{对某些}\ y\in C(v)\ \text{成立}\right\}\right).$$

对于核心的公理化描述, 建议读者参考文献 [67], [85] 和 [87].

对于合作博弈, 作为解概念的其他转归的子集有优势核心 (D–核心) 和稳定集[78]. 它们是基于下列在 $\mathbb{R}^n$ 上向量的支配关系来定义的.

定义 2.7 令 $v\in G^N$, $x,y\in I(v)$, $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$. 称**在联盟 S 上 x 支配 y**, 记做 $x\,\mathrm{dom}_S\,y$, 如果

(i) 对所有 $i\in S$, 都有 $x_i>y_i$,

(ii) $\sum\limits_{i\in S}x_i\leqslant v(S)$.

注意, 如果 (i) 成立, 则对 S 中的所有成员而言收益 x 比收益 y 好; 条件 (ii) 保证支付 x 在 S 上是可以实现的.

定义 2.8 $v\in G^N$, $x,y\in I(v)$. 称 x **支配** y, 记做 $x\,\mathrm{dom}\,y$, 如果存在 $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 使得 $x\,\mathrm{dom}_S\,y$.

命题 2.9 令 $v\in G^N$, $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, 则关系 dom_S 和 dom 是非自反的. 另外, dom_S 是可传递的和非对称的.

证明 dom_S 和 dom 是非自反的是基于以下事实, 即对于 $x\in I(v)$, 不存在 $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 使得对所有 $i\in S$, 都有 $x_i>x_i$.

为了证明 dom_S 是可传递的, 取 $x, y, z \in I(v)$ 使得 $x\,\mathrm{dom}_S\,y$ 以及 $y\,\mathrm{dom}_S\,z$, 则对所有 $i \in S$, 都有 $x_i > z_i$, 因此, $x\,\mathrm{dom}_S\,z$.

为了证明 dom_S 是非对称的, 假设 $x\,\mathrm{dom}_S\,y$, 则对所有 $i \in S$, 都有 $x_i > y_i$, 也就是说, 不存在 $i \in S$ 满足 $y_i > x_i$, 因此, $y\,\mathrm{dom}_S\,x$ 不成立.

对于 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 用 $D(S)$ 表示由 S 支配的转归的集合. 注意, S 中的参与者可以成功抵制 $D(S)$ 中的任何转归.

定义 2.10　博弈 $v \in G^N$ 的**优势核心** (dominance core) (D–核心) $\mathrm{DC}(v)$ 包含 $I(v)$ 中的所有不受支配的元素, 也就是说,

$$\mathrm{DC}(v) = I(v) \backslash \bigcup_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} D(S).$$

易知 $\mathrm{DC}(v)$ 也是一个凸集, 且它是一个多面体和相对于策略等价的相对不变式. 关于比较 D–核心和合作博弈的核心的一些定理, 可参考文献 [67].

对于 $v \in G^N$ 和 $A \subset I(v)$, 记 $\mathrm{dom}(A)$ 是由被 A 中某些元素支配的所有转归的集合, 有 $\mathrm{DC}(v) = I(v) \backslash \mathrm{dom}(I(v))$.

定义 2.11　对于 $v \in G^N$, $I(v)$ 的子集 K 称为**稳定集**, 如果下列条件成立:

(i) (内部稳定性 (internal stability))　$K \cap \mathrm{dom}(K) = \varnothing$,

(ii) (外部稳定性 (external stability))　$I(v) \backslash K \subset \mathrm{dom}(K)$.

这个概念是由 von Neumann 和 Morgenstern[78] 引进的, 用于解释一个稳定集对应一个 “行为标准”, 这个被逐渐接受的行为标准是自我强制的 (self-enforcing).

定义 2.11 中的两个条件也可以如下解释:

- 对于外部稳定性, 一个不在稳定集 K 中的转归似乎不可能被接受: 总有一个联盟喜欢 K 中的可达到的转归, 隐含存在一个选择 K 中转归的趋势;
- 对于内部稳定性, 所有在 K 中的转归关于联盟的支配关系是 “相等的”, 也就是说, K 中不存在一个转归支配另一个转归的情况.

注意, 对于一个 $v \in G^N$, 集合 K 是稳定集当且仅当 K 和 $\mathrm{dom}(K)$ 形成 $I(v)$ 的一个分割. 原则上, 一个博弈可以有很多稳定集, 也可能没有稳定集.

定理 2.12　令 $v \in G^N$, K 是 v 的稳定集, 则

(i) $C(v) \subset \mathrm{DC}(v) \subset K$;

(ii) 如果 v 满足超可加性, 则 $\mathrm{DC}(v) = C(v)$;

(iii) 如果 $\mathrm{DC}(v)$ 是一个稳定集, 则再没有其他稳定集.

证明　(i) 为了证明 $C(v) \subset \mathrm{DC}(v)$, 首先假定存在 $x \in C(v)$ 但 $x \notin DC(v)$. 则存在一个 $y \in I(v)$ 和一个联盟 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 使得 $y\,\mathrm{dom}_S\,x$. 则 $v(S) \geqslant \sum\limits_{i \in S} y_i > \sum\limits_{i \in S} x_i$, 这蕴含着 $x \notin C(v)$.

为证 $\mathrm{DC}(v) \subset K$, 只需证 $I(v)\backslash K \subset I(v)\backslash \mathrm{DC}(v)$. 令 $x \in I(v)\backslash K$. 由 K 的外部稳定性, 存在一个 $y \in K$ 满足 $y\,\mathrm{dom}\,x$. $\mathrm{DC}(v)$ 中的元素是不被支配的, 因此 $x \notin \mathrm{DC}(v)$, 也就是说 $x \in I(v)\backslash \mathrm{DC}(v)$.

(ii) 将这个断言的证明分成两部分.

(ii.1) 证明对一个 $x \in I(v)$, 其中 $\sum_{i\in S} x_i < v(S)$ 对某些 $S \in 2^N\backslash\{\varnothing\}$ 成立, 则存在 $y \in I(v)$ 使得 $y\,\mathrm{dom}_S\,x$. 按如下方式定义 y:

$$y_i := \begin{cases} x_i + \dfrac{v(S) - \sum\limits_{i\in S} x_i}{|S|}, & \text{如果 } i \in S, \\ v(i) + \dfrac{v(N) - v(S) - \sum\limits_{i\in N\backslash S} v(i)}{|N\backslash S|}, & \text{如果 } i \notin S. \end{cases}$$

则 $y \in I(v)$, 其中为了证明对 $i \in N\backslash S$ 有 $y_i \geqslant v(i)$, 用到了博弈的超可加性. 进一步, $y\,\mathrm{dom}_S\,x$.

(ii.2) 为了证明 $\mathrm{DC}(v) = C(v)$, 由于有 (i), 只需证明 $\mathrm{DC}(v) \subset C(v)$. 假定 $x \in \mathrm{DC}(v)$. 则不存在 $y \in I(v)$ 使得 $y\,\mathrm{dom}\,x$. 由 (ii.1) 有, 对所有 $S \in 2^N\backslash\{\varnothing\}$, 有 $\sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S)$ 成立, 因此 $x \in C(v)$.

(iii) 假定 $\mathrm{DC}(v)$ 是一个稳定集, 令 K 也是一个稳定集. 由 (i) 有 $\mathrm{DC}(v) \subset K$. 为了证明 $K = \mathrm{DC}(v)$, 必须证明 $K\backslash \mathrm{DC}(v) = \varnothing$. 用反证法, 假定存在 $x \in K\backslash \mathrm{DC}(v)$. 由 $\mathrm{DC}(v)$ 的外部稳定性, 存在 $y \in \mathrm{DC}(v)\,(\subset K)$ 使得 $y\,\mathrm{dom}\,x$. 这与 K 的内部稳定性矛盾, 因此 $K\backslash \mathrm{DC}(v) = \varnothing$.

除了在定理 2.12 中已经建立的核心、优势核心和稳定集之间的关系外, 下个定理将不加证明地陈述在书中其余部分用到的另外一些结论.

定理 2.13 令 $v \in G^N$, 则

(i) 如果 $\mathrm{DC}(v) \neq \varnothing$, 并且对每个 $S \subset N$ 有 $v(N) \geqslant v(S) - \sum_{i\in N\backslash S} v(i)$, 则 $C(v) = \mathrm{DC}(v)$;

(ii) 如果 $C(v) \neq \mathrm{DC}(v)$, 则 $C(v) = \varnothing$.

对于这些关系的详细证明, 读者可参阅文献 [42], [90], [105] 和 [110].

另外一个类似核心的解概念是在文献 [98] 中引进的涉及公正规范的等分核心 (equal division core).

定义 2.14 博弈 $v \in G^N$ 的**等分核心** $\mathrm{EDC}(v)$ 定义为集合:

$$\left\{x \in I(v) \,\middle|\, \nexists S \in 2^N\backslash\{\varnothing\}, \text{使得对所有 } i \in S \text{ 都有 } \frac{v(S)}{|S|} > x_i\right\}.$$

换句话说, 博弈的等分核心是由大联盟的有效支付向量组成的, 这个支付向量不能被任何子联盟的等分分配改进. 很明显, 合作博弈的核心包含在该博弈的等分核心中. 读者可以在文献 [13] 中找到这个解概念在两个合作博弈类上的公理化描述.

2.2　核心覆盖、合理集合和 Weber 集

这一节介绍三种与核心相关的集合, 称为核心覆盖[116]、合理集合[51,69,72], 以及 Weber 集[124]. 所有这些集合都包含对应博弈的核心作为其子集合, 因此都可以看成是核心捕捉器.

在核心覆盖的定义中, 用到了博弈 $v \in G^N$ 的上向量 $M(N,v)$ 和下向量 $m(v)$ 的概念.

对于每个 $i \in N$, 上向量 $M(N,v)$ 的第 i 个坐标 $M_i(N,v)$ 是参与者 i 对大联盟的边际贡献 (参见定义 1.7); 也称其为在大联盟中第 i 个参与者的理想收益, 因为可以这样理解, 如果第 i 个参与者总想获得更多个人收益, 则 N 中的其他参与者把第 i 个参与者驱逐出联盟是有利的.

定义 2.15　令 $S \in 2^N \setminus \{\varnothing\}, i \in S$. 联盟 S 中参与者 i 的**剩余** $R(S,i)$ 是这样一个量, 它是联盟 S 的收益除去联盟中其他参与者的理想收益后的剩余, 即

$$R(S,i) := v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(N,v).$$

对于每个 $i \in N$, 下向量 $m(v)$ 的第 i 个坐标 $m_i(v)$ 由下式定义:

$$m_i(v) := \max_{S:\ i \in S} R(S,i).$$

也可以将 $m_i(v)$ 看成是参与者 i 的最小恰当支付 (minimum right payoff), 因为参与者 i 有理由在大联盟 N 中要求获得至少 $m_i(v)$ 的收益, 因为他可以鼓动形成联盟 S 并获得收益 $m_i(v) = R(S,i)$, 同时联盟 S 中的其他参与者很高兴获得他们的理想支付.

定义 2.16　博弈 $v \in G^N$ 的**核心覆盖** (core cover) $\mathrm{CC}(v)$ 包含所有值介于 $m(v)$ 和 $M(N,v)$ 之间的分配 (在 $\mathbb{R}^n$ 中通常意义下的偏序), 也就是说,

$$\mathrm{CC}(v) := \{x \in I(v) \,|\, m(v) \leqslant x \leqslant M(N,v)\}.$$

由下面的定理知, $\mathrm{CC}(v)$ 是一个核心捕捉器. 同时可知, 下 (上) 向量是核心的下 (上) 界.

定理 2.17 令 $v \in G^N$, $x \in C(v)$. 那么 $m(v) \leqslant x \leqslant M(N,v)$, 也就是说, 对所有的 $i \in N$, 都有 $m_i(v) \leqslant x_i \leqslant M_i(N,v)$.

证明 (i) 对每个 $i \in N$,

$$x_i = x(N) - x(N\setminus\{i\}) = v(N) - x(N\setminus\{i\}) \leqslant v(N) - v(N\setminus\{i\}) = M_i(N,v).$$

(ii) 考虑到 (i), 对每个 $S \subset N$ 以及每个 $i \in S$, 有

$$x_i = x(S) - x(S\setminus\{i\}) \geqslant v(S) - \sum_{j\in S\setminus\{i\}} M_j(N,v) = R(S,i).$$

因此, 对每个 $i \in S$, $x_i \geqslant \max_{S:i\in S} R(S,i) = m_i(v)$.

博弈 $v \in G^N$ 的另一个核心捕捉器介绍如下[72].

定义 2.18 博弈 $v \in G^N$ 的**合理集合** $R(v)$ 定义为集合:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| v(i) \leqslant x_i \leqslant \max_{S:i\in S}(v(S)) - v(S\setminus\{i\})\right\}.$$

很明显, $C(v) \subset \mathrm{CC}(v) \subset R(v)$. 有关合理集合的一些公理和性质可参见文献[51].

下面介绍博弈 $v \in G^N$ 的最后一个核心捕捉器 ——Weber 集[124]. 在其定义中, 边际贡献向量 (参见定义 1.8) 将起作用.

定义 2.19 博弈 $v \in G^N$ 的 **Weber 集** $W(v)$ 是对应于 $n!$ 个排列 $\sigma \in \pi(N)$ 的 $n!$ 个边际向量 $m^\sigma(v)$ 的凸包.

这里, $m^\sigma(v)$ 是这样的向量, 对每个 $k \in N$,

$$\begin{aligned}
&m^\sigma_{\sigma(1)}(v) := v(\sigma(1)),\\
&m^\sigma_{\sigma(2)}(v) := v(\sigma(1),\sigma(2)) - v(\sigma(1)),\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\\
&m^\sigma_{\sigma(k)}(v) := v(\sigma(1),\cdots,\sigma(k)) - v(\sigma(1),\cdots,\sigma(k-1)).
\end{aligned}$$

支付向量 m^σ 可以按下列方式产生：令参与者们按照 $\sigma(1),\cdots,\sigma(n)$ 的顺序一个接着一个进入同一个房间, 并且给每个参与者一个由他自己进入房间时所产生的边际贡献.

Weber 集是一个核心捕捉器, 有下面的定理.

定理 2.20 令 $v \in G^N$, 那么 $C(v) \subset W(v)$.

证明 如果 $|N| = 1$, 那么 $I(v) = C(v) = W(v) = \{(v(1))\}$.

对于 $|N| = 2$, 考虑两种情况：$I(v) = \varnothing$ 和 $I(v) \neq \varnothing$.

如果 $I(v)=\varnothing$, 则 $C(v)\subset I(v)=\varnothing\subset W(v)$;

如果 $I(v)\neq\varnothing$, 则令

$$x'=(v(1),v(1,2)-v(1))$$

以及

$$x''=(v(2),v(1,2)-v(2)),$$

并且注意到

$$\begin{aligned}C(v)=I(v)&=\mathrm{co}\{x',x''\}\\&=\mathrm{co}\{m^{\sigma}(v)\,|\sigma:\{1,2\}\to\{1,2\}\}=W(v).\end{aligned}$$

通过对参与者数量使用归纳法来继续证明. 因此, 假定 $|N|=n>2$, 并且假定对参与者小于 n 的所有博弈, 博弈核心是 Weber 集的子集.

由于 $C(v)$ 和 $W(v)$ 都是凸集, 只需要证明, $x\in\mathrm{ext}(C(v))$ 蕴含 $x\in W(v)$. 取 $x\in\mathrm{ext}(C(v))$, 则由定理 1.33, 存在 $T\in 2^N\setminus\{\varnothing,N\}$, 使得 $x(T)=v(T)$. 考虑如下定义的具有 $|T|$ 个人的博弈 u 和具有 $(n-|T|)$ 个人的博弈 w,

对每个 $S\in 2^T$, $u(S)=v(S)$;

对每个 $S\in 2^{N\setminus T}$, $w(S)=v(T\bigcup S)-v(T)$.

显然, $x^T\in C(u)$. 因为对所有 $S\in 2^{N\setminus T}$,

$$x^{N\setminus T}(S)=x(S)=x(T\bigcup S)-x(T)\geqslant v(T\bigcup S)-x(T)=v(T\bigcup S)-v(T)=w(S)$$

以及

$$\sum_{i\in N\setminus T}x_i^{N\setminus T}=x(N)-x(T)=v(N)-v(T)=w(N\setminus T),$$

因此, $x^{N\setminus T}\in C(w)$.

由于 $|T|<n$, $|N\setminus T|<n$, 归纳假设蕴含了 $x^T\in W(u)$ 以及 $x^{N\setminus T}\in W(w)$.

因此 $x=x^T\times x^{N\setminus T}\in W(u)\times W(w)\subset W(v)$. 最后的包含关系可以从下面获得. $W(u)\times W(w)$ 的极点具有形式 (m^{ρ},m^{τ}), 其中 $\rho:\{1,\cdots,|T|\}\to T$, $\tau:\{1,\cdots,|N\setminus T|\}\to N\setminus T$ 是双射的, 并且 $m^{\rho}\in\mathbb{R}^{|T|}$, $m^{\tau}\in\mathbb{R}^{|N\setminus T|}$ 由下式给出:

$$\begin{aligned}&m^{\rho}_{\rho(1)}:=u(\rho(1))=v(\rho(1)),\\&m^{\rho}_{\rho(2)}:=u(\rho(1),\rho(2))-u(\rho(1))=v(\rho(1),\rho(2))-v(\rho(1)),\\&\qquad\cdots\cdots\\&m^{\rho}_{\rho(|T|)}:=u(T)-u(T\setminus\{\rho(|T|)\})=v(T)-v(T\setminus\{\rho(|T|)\}),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m^{\tau}_{\tau(1)} &:= w(\tau(1)) = v(T \bigcup \{\tau(1)\}) - v(T),\\
m^{\tau}_{\tau(2)} &:= w(\tau(1), \tau(2)) - w(\tau(1)) = v(T \bigcup \{\tau(1), \tau(2)\}) - v(T \bigcup \{\tau(1)\}),\\
&\cdots\cdots\\
m^{\tau}_{\tau(|N\backslash T|)} &:= w(N\backslash T) - w((N\backslash T) \setminus \{\tau(|N\backslash T|)\})\\
&= v(N) - v(N \setminus \{\tau(|N\backslash T|)\}).
\end{aligned}
$$

因此, $(m^{\rho}, m^{\tau}) \in \mathbb{R}^N$ 对应于 $W(v)$ 的边际向量 m^{σ}, 其中 $\sigma : N \to N$ 由下式定义:

$$
\sigma(i) := \begin{cases} \rho(i), & \text{如果 } 1 \leqslant i \leqslant |T|,\\ \tau(i - |T|), & \text{如果 } |T| + 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}
$$

因此 $\text{ext}(W(u) \times W(w)) \subset W(v)$. 由于 $W(v)$ 是凸的, $W(u) \times W(w) \subset W(v)$. 所以 $x \in \text{ext}(C(v))$ 蕴含 $x \in W(v)$.

关于定理 2.20 的其他证明, 读者可以参考文献 [38].

第 3 章　Shapley 值、τ 值和平均字典序值

Shapley 值、τ 值和平均字典序值是最近在文献 [111] 中引入的合作博弈的三个有趣的单点解概念. 本章讨论这三种解的不同形式、一些性质并且给出 Shapley 值的公理化描述.

3.1　Shapley 值

对每个博弈 $v \in G^N$, Shapley 值[102] 对应一个 $\mathbb{R}^n$ 中的支付向量. 关于 Shapley 值更多有趣的讨论可以参见文献 [93].

Shapley 值的第一个形式用的是合作 TU–博弈的边际向量 (参见定义 1.8).

定义 3.1　对一个博弈 $v \in G^N$, **Shapley 值**是博弈的边际向量的平均值, 记作 $\Phi(v)$, 即

$$\Phi(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} m^{\sigma}(v) \tag{3.1}$$

由 (3.1) 式可以看到, Shapley 值可以用概率来解释. 假定从含有 $\pi(N)$ 的元素的容器中抽一个排列 σ (具有等可能性 $1/n!$). 让参与者按照排列 σ 一个接一个进入同一个房间, 并且给每个参与者一个由他自己产生的边际贡献. 按照这个随机过程, 对每个 $i \in N$, $\Phi(v)$ 的第 i 个坐标 $\Phi_i(v)$ 就是第 i 个参与者的期望支付.

由定义 1.8 可将 (3.1) 式重写为

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} (v(P^{\sigma}(i) \bigcup \{i\}) - v(P^{\sigma}(i))). \tag{3.2}$$

例 3.2　令 $N = \{1,2,3\}$, $v(1,2) = -2$, 如果 $S \neq \{1,2\}$ 则 $v(S) = 0$. 那么 Shapley 值是向量 $(0,-2,2), (0,0,0), (-2,0,2), (0,0,0), (0,0,0)$ 和 $(0,0,0)$ 的平均值, 即

$$\Phi(v) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

注释 3.3　注意到在例 3.2 的博弈中, $\Phi_1(v) = -\dfrac{1}{3} < 0 = v(1)$, 由此说明 Shapley 值不需要满足个体合理性 (参见定义 1.27 (i)).

(3.2) 式中求和符号里面项的形式是 $v(S\bigcup\{i\})-v(S)$, 其中 S 是不包含 i 的 N 的子集. 注意到 $P^{\sigma}(i)=S$ 恰有 $|S|!(n-1-|S|)!$ 个排序. 第一个因子 $|S|!$ 对应于 S 的排序数, 第二个因子 $(n-1-|S|)!$ 对应于 $N\backslash(S\bigcup\{i\})$ 的排序数. 由此, 可以重写 (3.2) 式为

$$\Phi_i(v)=\sum_{S:i\notin S}\frac{|S|!(n-1-|S|)!}{n!}(v(S\bigcup\ \{i\})-v(S)). \tag{3.3}$$

注意, $\dfrac{|S|!(n-1-|S|)!}{n!}=\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix}n-1\\|S|\end{pmatrix}^{-1}$. 这给出了 Shapley 值的第二种概率解释. 按如下方式生成一个 $i\notin S$ 的子集 S: 首先生成一个随机数, 大小在 $0,\cdots,n-1$ 之间, 其中每个数有 $\dfrac{1}{n}$ 的可能性被选中. 如果 s 被选中, 则从由所有 $N\backslash\{i\}$ 的子集族中选一个大小为 s 的子集, 则每个集合有同样的概率 $\begin{pmatrix}n-1\\|S|\end{pmatrix}^{-1}$ 被选中. 如果集合 S 被选中, 则需要给第 i 个参与者 $v(S\bigcup\{i\})-v(S)$ 的支付. 因此, 通过观察 (3.3) 式, 易知在这个随机过程中, 第 i 个参与者在博弈 $v\in G^N$ 中的期望支付就是 Shapley 值.

例 3.4 (i) 给定博弈 $v\in G^{\{1,2\}}$, 对 $i\in\{1,2\}$, 有

$$\Phi_i(v)=v(i)+\frac{v(1,2)-v(1)-v(2)}{2}.$$

(ii) 对于一个可加博弈 $v\in G^N$, Shapley 值等于 $(v(1),\cdots;v(n))$.

(iii) 对于 $S\subset N$, 令 u_S 是无异议博弈 (参见 (1.1) 式), 则 $\Phi(u_S)=\dfrac{1}{|S|}e^S$.

正如在定义 1.27 中描述的那样, Shapley 值满足一些性质. 详尽地, 有下面的命题.

命题 3.5 Shapley 值满足可加性、匿名性 (anonymity)、虚拟参与者性 (the dummy player property) 和有效性.

证明 (可加性) 可加性直接来源于事实: 对于所有的 $u,v\in G^N$, 有 $m^{\sigma}(u+v)=m^{\sigma}(u)+m^{\sigma}(v)$.

(匿名性) 这部分证明分为两部分.

(a) 首先证明

对所有的 $v\in G^N$ 和 $\rho,\sigma\in\pi(N)$, 有 $\rho^*(m^{\sigma}(v))=m^{\rho\sigma}(v^{\rho})$.

这是因为对所有 $i \in N$, 有

$$
\begin{aligned}
&\left(m^{\rho\sigma}\left(v^{\rho}\right)\right)_{\rho\sigma(i)} \\
&= v^{\rho}\left(\rho\sigma\left(1\right),\cdots,\rho\sigma\left(i\right)\right) - v^{\rho}\left(\rho\sigma\left(1\right),\cdots,\rho\sigma\left(i-1\right)\right) \\
&= v\left(\sigma\left(1\right),\cdots,\sigma\left(i\right)\right) - v\left(\sigma\left(1\right),\cdots,\sigma\left(i-1\right)\right) \\
&= \left(m^{\sigma}\left(v\right)\right)_{\sigma(i)} = \rho^{*}\left(m^{\sigma}\left(v\right)\right)_{\rho\sigma(i)}.
\end{aligned}
$$

(b) 取 $v \in G^N$ 和 $\rho \in \pi(N)$, 则由 (a) 和 $\rho \to \rho\sigma$ 是 $\pi(N)$ 上的满射的事实, 以及 ρ^* 的线性性, 得到

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(v^{\rho}\right) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi(N)} m^{\sigma}\left(v^{\rho}\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi(N)} m^{\rho\sigma}\left(v^{\rho}\right) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi(N)} \rho^{*}\left(m^{\sigma}\left(v\right)\right) = \rho^{*}\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi(N)} m^{\sigma}\left(v\right)\right) = \rho^{*}\left(\Phi\left(v\right)\right),
\end{aligned}
$$

这就证明了 Φ 的匿名性.

(虚拟参与者性质) 注意到 $\displaystyle\sum_{S:\ i\notin S}\frac{|S|!\,(n-1-|S|)!}{n!} = 1$, 再由 (3.3) 式可直接得此性质.

(有效性) 注意到 Φ 是 m^{σ} 的凸组合, 并且对每个 $\sigma \in \pi(N)$, $\displaystyle\sum_{i\in N} m_i^{\sigma}(v) = v(N)$.

由命题 3.5 中的性质, 可给出 Shapley 值的一个公理化描述.

定理 3.6[102]　解 $f: G^N \to \mathbb{R}^n$ 满足可加性、匿名性、虚拟参与者性质和有效性当且仅当它是 Shapley 值.

证明　结合命题 3.5, 只需证明如果 f 满足这四个性质, 则 $f = \Phi$.

令 $v \in G^N$, 那么 $v = \displaystyle\sum_{T\in 2^N\setminus\{\varnothing\}} c_T u_T$, 其中对每个 $T \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, u_T 是无异议博弈, 并且

$$
c_T = \sum_{S:S\subset T} (-1)^{|T|-|S|}\, v(S)
$$

(参见 (1.2) 式). 那么由可加性有 $f(v) = \displaystyle\sum_{T\in 2^N\setminus\{\varnothing\}} f(c_T u_T)$, $\Phi(v) = \displaystyle\sum_{T\in 2^N\setminus\{\varnothing\}} \Phi(c_T u_T)$. 因此只需证明对所有的 $T \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 和 $c \in \mathbb{R}$ 有

$$
f\left(cu_T\right) = \Phi\left(cu_T\right). \tag{3.4}
$$

取 $T \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 和 $c \in \mathbb{R}$, 首先注意到对所有的 $i \in N\setminus T$ 及所有的 $S \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 有

$$
cu_T\left(S \cup \{i\}\right) - cu_T(S) = 0 = cu_T\left(i\right).
$$

因此, 由虚拟参与者性质有, 对所有的 $i \in N\backslash T$

$$f_i(cu_T) = \Phi_i(cu_T) = 0. \tag{3.5}$$

现假定 $i,j \in T$, $i \neq j$, 那么存在 $\sigma \in \pi(N)$ 满足 $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$, $\sigma(k) = k$, 其中 $k = N\backslash\{i,j\}$. 很容易得到 $cu_T = \sigma(cu_T)$. 那么匿名性蕴含 $\Phi(cu_T) = \Phi(\sigma(cu_T)) = \sigma^*\Phi(cu_T)$, $\Phi_{\sigma(i)}(cu_T) = \Phi_i(cu_T)$, 因此, 对所有的 $i,j \in T$, 有

$$\Phi_i(cu_T) = \Phi_j(cu_T). \tag{3.6}$$

同样的, 对所有的 $i,j \in T$, 有 $f_i(cu_T) = f_j(cu_T)$.

因此, 有效性以及 (3.5) 式和 (3.6) 式蕴含, 对所有 $i \in T$,

$$f_i(cu_T) = \Phi_i(cu_T) = \frac{c}{|T|}. \tag{3.7}$$

现在, (3.5) 式和 (3.7) 式蕴含 (3.4) 式, 因此对所有的 $v \in G^N$, $f(v) = \Phi(v)$.

对于 Shapley 值的其他公理化描述可以参见文献 [56], [74] 和 [128].

Shapley 值的另外一种形式是关于红利 (dividends) 的[55]. 一个博弈 $v \in G^N$ 的非空联盟 T 的红利 d_T 是按如下递归方式定义的:

$$\begin{cases} d_T(v) := v(T), & \text{对所有 } |T| = 1, \\ d_T(v) := \dfrac{v(T) - \sum\limits_{S \subset T, S \neq T} |S|\, d_S(v)}{|T|}, & \text{如果 } |T| > 1. \end{cases}$$

红利和 Shapley 值的关系在下个定理中陈述: 博弈中一个参与者的 Shapley 值是该参与者所属的联盟的所有红利的和.

定理 3.7　令 $v \in G^N$, $v = \sum\limits_{T \in 2^N\backslash\{\varnothing\}} c_T u_T$, 那么

(i) 对所有的 $T \in 2^N\backslash\{\varnothing\}$, $|T|\, d_T(v) = c_T$;

(ii) 对所有的 $i \in N$, $\Phi_i(v) = \sum\limits_{T: i \in T} d_T(v)$.

证明　从定理 3.6 的证明可以看到, 对每个 $T \in 2^N\backslash\{\varnothing\}$, $\Phi(c_T u_T) = \dfrac{c_T}{|T|} e^T$, 因此由可加性, 有

$$\Phi(v) = \sum_{T \in 2^N\backslash\{\varnothing\}} \frac{c_T}{|T|} e^T.$$

因此, $\Phi_i(v) = \sum\limits_{T: i \in T} \dfrac{c_T}{|T|}$. 我们仅需证明, 对所有 $T \in 2^N\backslash\{\varnothing\}$,

$$\frac{c_T}{|T|} = d_T. \tag{3.8}$$

下面用归纳法来证明这个结论. 如果 $|T|=1$, 则 $c_T=v(T)=d_T(v)$. 假定对所有 $S\subset T$, $S\neq T$ 有 (3.8) 式成立, 由于 $v(T)=\sum\limits_{S\subset T}c_S$, 则 $|T|\,d_T(v)=v(T)-\sum\limits_{S\subset T,S\neq T}|S|\,d_S(v)=v(T)-\sum\limits_{S\subset T,S\neq T}c_S=c_T$.

现在, 用博弈的多维线性扩展 (multilinear extension) 来描述 Shapley 值[83,84].

令 $v\in G^N$, 考虑在超立方体 $[0,1]^n$ 上定义的函数 $f:[0,1]^n\to\mathbb{R}$:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{S\in 2^N}\left(\prod_{i\in S}x_i\prod_{i\in N\backslash S}(1-x_i)\right)v(S). \tag{3.9}$$

按照定理 1.33, $[0,1]^n$ 的极点集合等于 $\{e^S|S\in 2^N\}$.

命题 3.8 令 $v\in G^N$, f 如上定义, 那么对每个 $S\in 2^N$ 有 $f(e^S)=v(S)$.

证明 注意到

$$\begin{cases}\prod\limits_{i\in S}(e^T)^i\prod\limits_{i\in N\backslash S}\left(1-(e^T)^i\right)=1, & \text{如果 } S=T,\\ \prod\limits_{i\in S}(e^T)^i\prod\limits_{i\in N\backslash S}\left(1-(e^T)^i\right)=0, & \text{否则}.\end{cases}$$

因此, 由 (3.9) 式有

$$f(e^T)=\sum_{S\in 2^N}\left(\prod_{i\in S}(e^T)^i\prod_{i\in N\backslash S}\left(1-(e^T)^i\right)\right)v(S)=v(T).$$

下面给出 $f(x)$ 的一个概率解释. 假定每个参与者 $i\in N$ 独立地决定是合作 (以概率 x_i) 还是不合作 (以概率 $1-x_i$), 那么以概率 $\prod\limits_{i\in S}x_i\prod\limits_{i\in N\backslash S}(1-x_i)$ 形成联盟 S, 且具有收益 $v(S)$. 因此, (3.9) 式给出的 $f(x)$ 可以看成是形成联盟的期望收益值.

用 $D_kf(x)$ 表示 f 对 x 的第 k 个坐标的导数, 那么我们可以用 D_kf 沿着 $[0,1]^n$ 的主对角线的积分来解释 $v\in G^N$ 的 Shapley 值 $\Phi_k(v)$.

定理 3.9[83] 令 $v\in G^N$, f 如 (3.9) 式定义, 那么对每个 $k\in N$, 有

$$\Phi_k(v)=\int_0^1(D_kf)(t,\cdots,t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 注意到

$$
\begin{aligned}
&D_k f(x)\\
&=\sum_{T:k\in T}\left(\prod_{i\in T\setminus\{k\}} x_i \prod_{i\in N\setminus T}(1-x_i)\right)v(T)-\sum_{S:k\notin S}\left(\prod_{i\in S}x_i \prod_{i\in N\setminus(S\bigcup\{k\})}(1-x_i)\right)v(S)\\
&=\sum_{S:k\notin S}\left(\prod_{i\in S}x_i \prod_{i\in N\setminus(S\bigcup\{k\})}(1-x_i)\right)(v(S\bigcup\{k\})-v(S)).
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 (D_k f)(t,\cdots,t)\,\mathrm{d}t\\
&=\sum_{S:k\notin S}\left(\int_0^1 t^{|S|}(1-t)^{n-|S|-1}\,\mathrm{d}t\right)(v(S\bigcup\{k\})-v(S)).
\end{aligned}
$$

由著名的 bete-积分公式

$$
\int_0^1 t^{|S|}(1-t)^{n-|S|-1}\,\mathrm{d}t=\frac{|S|!\,(n-1-|S|)!}{n!}
$$

及 (3.3) 式得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 (D_k f)(t,\cdots,t)\,\mathrm{d}t\\
&=\sum_{S:k\notin S}\frac{|S|!\,(n-1-|S|)!}{n!}(v(S\bigcup\{k\})-v(S))=\Phi_k(v).
\end{aligned}
$$

例 3.10 令 $v\in G^{\{1,2,3\}}$, 并且 $v(1)=v(2)=v(1,2)=0, v(1,3)=1, v(2,3)=2$, $v(N)=4$. 那么对所有的 $x_1,x_2,x_3\in[0,1]$, $f(x_1,x_2,x_3)=x_1(1-x_2)x_3+2(1-x_1)x_2x_3+4x_1x_2x_3=x_1x_3+2x_2x_3+x_1x_2x_3$. 因此 $D_1 f(x)=x_3+x_2x_3$, 由定理 3.9 得到

$$
\Phi_1(v)=\int_0^1 D_1 f(t,t,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 (t+t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{5}{6}.
$$

3.2 τ 值

τ 值是由文献 [108] 引入, 对**拟均衡博弈** (quasi-balanced game) 定义的. 这个值是基于一个博弈 $v\in G^N$ 的上向量 (upper vector) $M(N,v)$ 和下向量 (lower vector) $m(v)$ (参见第 2.2 节) 定义的.

定义 3.11 博弈 $v\in G^N$ 称为是**拟均衡的** (quasi-balanced), 如果

(i) $m(v)\leqslant M(N,v)$,

(ii) $\sum_{i=1}^{n} m_i(v) \leqslant v(N) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(N,v)$.

用 Q^N 表示 $|N|$ 人拟均衡博弈的集合.

命题 3.12　如果博弈 $v \in G^N$ 是均衡的, 则 $v \in Q^N$.

证明　令博弈 $v \in G^N$ 是均衡的, 那么由定理 2.4, 它有非空核心.

令 $x \in C(v)$, 由定理 2.17 有 $m(v) \leqslant x \leqslant M(N,v)$, 由此有 $m(v) \leqslant M(N,v)$, 并且

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(v) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i =\right) v(N) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(N,v),$$

因此, $v \in Q^N$.

定义 3.13　对于一个博弈 $v \in G^N$, 其 **τ 值**由下式定义

$$\tau(v) := \alpha\, m(v) + (1-\alpha) M(N,v),$$

其中 $\alpha \in [0,1]$ 由 $\sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N)$ 唯一地决定.

例 3.14　令 $v \in G^{\{1,2,3\}}$, $v(N)=5$, 对所有的 $i \in N$, $v(i)=0$, $v(1,2)=v(1,3)=2$, $v(2,3)=3$. 那么 $M(N,v)=(2,3,3)$, $m_1(v)=\max\{0,-1,-1,-1\}=0$, $m_2(v)=m_3(v)=\max\{0,0,0,0\}=0$, 因此, $m(v)=0$, $v \in Q^{\{1,2,3\}}$. 所以 $\tau(v)=\alpha\, m(v)+(1-\alpha)M(N,v)=\frac{5}{8}(2,3,3)=\frac{5}{8}M(N,v)$.

命题 3.15　令 $v \in G^{\{1,2\}}$, 则

(i) $C(v)=I(v)$;

(ii) $\tau(v)=\Phi(v)$;

(iii) $\tau(v)$ 在核心 $C(v)$ 的中央.

证明　(i) 对于下向量和上向量有

$$\begin{aligned} m_1(v) &= \max\{v(1), v(1,2)-M_2(N,v)\} \\ &= \max\{v(1), v(1,2)-(v(1,2)-v(1))\} = v(1), \end{aligned}$$

$$M_1(N,v) = v(1,2) - v(2).$$

由于 $v \in Q^{\{1,2\}}$, 有 $v(1)=m_1(v) \leqslant M_1(N,v)=v(1,2)-v(2)$, 也就是说, v 是超可加的并且它的分配集合 $I(v)$ 非空, 因此

$$C(v) = \left\{ x \in I(v) \,\middle|\, \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S),\ \text{对每个 } S \subset N \right\} = I(v).$$

(ii) 对于 Shapley 值和 τ 值有

$$\Phi(v) = (\Phi_i(v))_{i \in \{1,2\}},\ \text{其中 } \Phi_i(v) = \frac{1}{2}v(i) + \frac{1}{2}(v(1,2)-v(3-i)),$$

$$\begin{aligned}\tau(v) &= \frac{1}{2}(M(N,v)+m(v)) \\ &= \frac{1}{2}((v(1,2)-v(2),v(1,2)-v(1))+v(1),v(2)) \\ &= \Phi(v).\end{aligned}$$

(iii) 由 (ii) 有 $\Phi(v)=\tau(v)=\frac{1}{2}\left(f^1+f^2\right)$ (参见 (2.1) 式), 它在核心 $C(v)$ 的中央.

例 3.16 令 v 是 99 人博弈, 满足: $v(N)=1$, 如果 $\{1,2\}\subset S\neq N$, 则 $v(S)=\frac{1}{2}$, $v(2,3,4,\cdots,99)=v(1,3,4,\cdots,99)=\frac{1}{4}$, 对于其他情况 $v(S)=0$.

对于上向量和下向量, 有

$$M(N,v)=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}\right)$$

以及

$$m(v)=(0,\cdots,0).$$

因此, $\tau(v)=(1-\alpha)M(N,v)$, 其中 $1-\alpha=\frac{4}{200}$, 所以

$$\tau(v)=\frac{4}{200}\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\cdots,\frac{2}{4}\right)=\frac{1}{200}(3,3,2,\cdots,2).$$

注释 3.17 例 3.16 中的博弈表明: τ 值可以不在一个博弈的核心 $C(v)$ 中, 注意, $\tau_1(v)+\tau_2(v)=\frac{6}{200}<\frac{1}{2}=v(1,2)$.

注释 3.18 有关 τ 值的一些公理可以参考文献 [109].

3.3 平均字典序值

本节讨论均衡合作博弈, 即具有非空核心的合作博弈 (参见定义 1.9 和定理 2.4), 并主要介绍这种博弈的平均字典序值或 AL 值[111]. 正如 Shapley 值的定义 (参见定义 3.1) 那样, 对应于一个 n 人博弈中的参与者的 $n!$ 个可能的排序, 定义 $n!$ 个向量的平均值. 不同的是 Shapley 值用的向量是博弈的边际向量, 而 AL 值中用到的向量是核心中的字典序最优点 (the lexicographically optimal points).

给定一个均衡博弈 $v\in G^N$ 和 N 中参与者的一个序 $\sigma=(\sigma(1),\cdots,\sigma(n))$, 博弈 v 的核心 $C(v)$ 中关于 σ 的字典序最优点用 $L^\sigma(v)$ 表示, 它是 $C(v)$ 中满足下面条件的唯一点:

$$(L^\sigma(v))_{\sigma(1)}=\max\left\{x_{\sigma(1)}|x\in C(v)\right\},$$

$$(L^{\sigma}(v))_{\sigma(2)} = \max\left\{x_{\sigma(2)} | x \in C(v), 满足\ x_{\sigma(1)} = (L^{\sigma}(v))_{\sigma(1)}\right\},$$

$$\cdots\cdots$$

$$(L^{\sigma}(v))_{\sigma(n)} = \max\left\{x_{\sigma(n)} | x \in C(v), 满足\ x_{\sigma(i)} = (L^{\sigma}(v))_{\sigma(i)}, i = 1, \cdots, n-1\right\}.$$

注意, 对每个 $\sigma \in \pi(N)$, 向量 $L^{\sigma}(v)$ 是 $C(v)$ 的极点.

定义 3.19　对于一个均衡博弈 $v \in G^N$, **平均字典序值** (average lexicographic value) AL(v) 是博弈核心中所有字典序最大向量的平均值, 即

$$\mathrm{AL}(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} L^{\sigma}(v).$$

例 3.20　令 $v \in G^{\{1,2\}}$ 是均衡的. 那么 $v(1,2) \geqslant v(1) + v(2)$, 核心 $C(v) = \mathrm{co}\left(\{f^1, f^2\}\right)$, 其中 $f^1 = (v(N) - v(2), v(2))$, $f^2 = (v(1), v(N) - v(1))$. 进一步, $\pi(N) = \{(1,2), (2,1)\}$, 并且 $L^{(1,2)}(v) = f^1$, $L^{(2,1)}(v) = f^2$. 因此, AL$(v) = \frac{1}{2}(f^1 + f^2) = \left(v(1) + \frac{1}{2}(v(1,2) - v(1) - v(2)), v(2) + \frac{1}{2}(v(1,2) - v(1) - v(2))\right)$, 这是 2 人博弈的标准解.

下面两个定理给出了两类特殊均衡博弈类 —— 单纯形博弈和对偶单纯形博弈的 AL 值的性质. 博弈 $v \in G^N$ 是均衡单纯形博弈 (balanced simplex game)[25,26], 如果它的核心 $C(v)$ 等于它的非空转归集 $I(v)$. 博弈 $v \in G^N$ 是均衡对偶单纯形博弈 (balanced dual simplex game)[25,26], 如果它的核心 $C(v)$ 等于它的非空对偶转归集 $I_d(v)$, 其中 $I_d(v) = \mathrm{co}\left(\{g^1(v), \cdots, g^n(v)\}\right)$, 这里

$$\left(g^k(v)\right)_i = \begin{cases} v^*(k) = v(N) - v(N \backslash \{k\}), & 如果\ i \neq k, \\ v(N) - \displaystyle\sum_{i \in N \backslash \{k\}} v^*(i), & 否则. \end{cases}$$

事实上, 对于这些博弈类, AL 值与另外两个单值解概念非常相关, 这两个单值解是转归集合的中心 (CIS) 和不可分收益的相等分离 (ESNR). 令 I^N 为具有非空转归集的所有博弈的集合, I_d^N 为具有非空对偶转归集的所有博弈的集合. 那么, CIS: $I^N \to \mathbb{R}^n$ 定义为 CIS$(v) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^k(v)$, ESNR: $I_d^N \to \mathbb{R}^n$ 定义为 ESNR$(v) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g^k(v)$.

定理 3.21　设 $v \in G^N$ 是均衡单纯形博弈, 那么 AL$(v) = $ CIS(v).

证明　注意到 $I(v) = \mathrm{co}\left\{f^1(v), \cdots, f^n(v)\right\}$, CIS$(v) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^k(v)$, 其中对

$i \in N\backslash\{k\}$ 有 $\left(f^k(v)\right)_i = v(i)$, $\left(f^k(v)\right)_k = v(N) - \sum_{i \in N\backslash\{k\}} v(i)$. 因为对每个 $\sigma \in \pi(N)$ 有 $L^\sigma(v) = f^{\sigma(1)}(v)$, 我们得到 $\mathrm{AL}(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \pi(N)} f^{\sigma(1)}(v) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^k(v) = \mathrm{CIS}(v)$.

对于对偶单纯形博弈 (也称为 1-凸博弈)[26,43], 我们不加证明地给出下列结论.

定理 3.22　设 $v \in G^N$ 是均衡对偶单纯形博弈, 那么 $\mathrm{AL}(v) = \mathrm{ENSR}(v)$, 进一步有, $\mathrm{AL}(v) = \tau(v)$.

很容易看到 AL 值满足下列性质: 个体合理性、有效性、核心选择性、S-等价性, 以及对称性. 同样, AL 值也满足虚拟参与者性质, 因为对每个均衡博弈 $v \in G^N$, $\mathrm{AL}(v)$ 是核心的元素, 并且对每个 $x \in C(v)$, 有

$$v(i) \leqslant x_i = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k \in N\backslash\{i\}} x_k \leqslant v(N) - v(N\backslash\{i\}).$$

因此, 如果 $i \in N$ 是一个虚拟参与者, 那么对每个核心元素有 $x_i = v(i)$, 特别地, $\mathrm{AL}_i(v) = v(i)$. 平均字典序值的其他性质将在第 5.2.4 节中讨论.

第4章　基于平均主义的解概念

4.1　概　　述

平均主义原理与人们平均分担的观念有关. 在一个博弈 v 中的所有参与者完全等分 $v(N)$ 的策略被所有参与者接受的机会很小, 因为它忽视了所有联盟 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing, N\}$ 对 $v(N)$ 的要求. 确信平均主义原理的群体将更希望尽可能相等的分配大联盟的值. 这样的分配应该与所有联盟的值相比较, 在具有高收益的群体中均分将有高的满意度. 联盟 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$ 的基于 v 的平均值 $a(S,v)$ 定义为 $a(S,v) := \dfrac{v(S)}{|S|}$, 也称为人均值, 它在定义一些基于平均主义的解概念中起关键作用. 这里提到的有等分核心 (参见定义 2.14)、等分离集合 (equal split-off set) (参见第 4.2 节), 以及受限平等解 (constrained egalitarian solution) (参见第 5.2.3 节).

另一种引进平均解概念的方法是使用了用于比较收入分配的平均准则 (egalitarian criteria), 比如 Lorenz 准则[99] 和 Rawlsian 准则[92]. 这些准则使用特殊的二元关系来比较收入分配, 为的是挑选出一个分配, 使得最糟糕参与者的收益分配最大. 更确切地, 考虑一个具有 n 个个体的群体, 这个群体具有固定的总收益 I 个单元. 对于任何 $x \in \mathbb{R}^n_+$, 用 $\hat{x} = (\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n)$ 表示对各个分量按不降序重新排过的向量, 即 $\hat{x}_1 \leqslant \cdots \leqslant \hat{x}_n$. 对满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = I$ 的任何 $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, 称 x Lorenz 占优 y, 并且记为 $x \succ_{\mathrm{L}} y$, 当且仅当对所有 $p \in \{1, \cdots, n-1\}$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{p} \hat{x}_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{p} \hat{y}_i$, 并且其中至少有一个式子是严格不等式成立. Rawlsian 准则是基于字典序最小 (leximin) 占优. 称 x 以字典序最小占优 y, 并且记为 $x \succ_{\mathrm{lex}} y$, 如果存在 $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ 满足, 对所有 $i = 1, \cdots, k$ 有 $\hat{x}_i = \hat{y}_i$, 同时 $\hat{x}_{k+1} > \hat{y}_{k+1}$.

许多关于平均主义的博弈论的文献, 都同意这样一个事实, 若要称一个分配是平均的, 它应该按照 Lorenz 准则来求最大. 对于任意的 TU–博弈, 关于 $v(N)$ 的分配, 使用 Lorenz 占优而得到的基于平均主义的解概念是受限平等解[46]、强受限平等解[47]、平等集合、预平等集合以及稳定平等集合[3]. 对于均衡博弈, Lorenz 准则对 Lorenz 解[59]、Lorenz 稳定集和平等核心[2] 起到了重要作用.

同时, 讨论一下不作为平等主义来补偿的解概念, 并揭露出它们是否使用一些对参与者或联盟的平等处理. 建议对平等主义感兴趣的读者参考文献 [1] 中关于预

核仁[96]、λ-预核仁[94]、核仁[96] 和 Shapley 值[102] 的介绍.

4.2 等分离集合

现在介绍一个具有转移支付的合作博弈的新的集值解概念, 称之为等分离集合 (equal split-off set)[21]. 更精确地, 考虑一个具有 n 个参与者的群体 N, $N=\{1,\cdots,n\}$, 这些人相信等共享合作并且参与博弈 $v\in G^N$. 假定整个参与者的集合将合作, 并处理如何将 N 产生的总货币 $v(N)$ 按下列过程在参与者之间分配的问题.

首先, 形成一个具有最大平均收益值的联盟, 记为 T_1, 在 T_1 中的参与者将均分 $v(T_1)$. 第二步, 形成关于 T_1 的具有最大平均边际值的 $N\backslash T_1$ 中的一个联盟, 记为 T_2, 将其加入到 T_1 中, 在它的成员中均分增长值 $v(T_2\bigcup T_1)-v(T_1)$. 对某个 $1\leqslant K\leqslant n$, 当 N 的一个具有形式 $\langle T_1,\cdots,T_K\rangle$ 的分割达到的时候, 这个过程结束.

这个过程产生一个有效的支付向量 $x\in\mathbb{R}^n$, 称之为等分离分配. 等分离集合是由所有等分裂分配组成.

4.2.1 一般博弈的等分离集合

令 $v\in G^N$, $\pi=\langle T_1,\cdots,T_K\rangle$ 是参与者集合 N 的一个有序分割. 令 $v_1:=v$, 并且对每个 $k\in\{2,\cdots,K\}$, 定义边际博弈 $v_k:2^{N\backslash(\bigcup_{s=1}^{k-1}T_s)}\to\mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned} v_k(S)&:=v_{k-1}\left(T_{k-1}\bigcup S\right)-v_{k-1}(T_{k-1})\\ &=v\left(\left(\bigcup_{s=1}^{k-1}T_s\right)\bigcup S\right)-v\left(\bigcup_{s=1}^{k-1}T_s\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

N 的分割 $\pi=\langle T_1,\cdots,T_K\rangle$ 是关于博弈 $v\in G^N$ 的一个适当有序分割, 如果对所有的 $k\in\{1,\cdots,K\}$ 都有

$$T_k\in\arg\max_{S\in 2^{N\backslash\left(\bigcup_{s=1}^{k-1}T_s\right)}\backslash\{\varnothing\}}\frac{v_k(S)}{|S|}.$$

给定这样一个分割 π, v 的由 π 产生的等分离分配是一个有效支付向量 $x=(x_i)_{i\in N}\in\mathbb{R}^n$, 其中对所有的 $T_k\in\pi$ 和 $i\in T_k$ 都有, $x_i=\dfrac{v_k(T_k)}{|T_k|}$.

定义 4.1 博弈 $v\in G^N$ 的**等分离集合** $\mathrm{ESOS}(v)$ 是集合

$$\mathrm{ESOS}(v)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\exists\,\pi\ \text{使得}\ x\ \text{是一个由}\ \pi\ \text{产生}\ v\ \text{的等分离分配}\right\}.$$

为了说明这个解概念, 有如下的例子.

例 4.2(2 人超可加博弈)　令 v 是参与者集合 $N=\{1,2\}$ 上满足 $v(1,2)\geqslant v(1)+v(2)$ 的一个博弈. 不失一般性, 假定 $v(1)\geqslant v(2)$, 并且考虑下列四种情况:

(i) $v(1)>\frac{1}{2}v(1,2)$, 那么 $\langle\{1\},\{2\}\rangle$ 是唯一的适合有序分割, 并且

$$\mathrm{ESOS}(v)=\{(v(1),v(1,2)-v(1))\};$$

(ii) $v(2)<v(1)=\frac{1}{2}v(1,2)$, 在这种情况下,

$$\mathrm{ESOS}(v)=\left\{\left(\frac{1}{2}v(1,2),\frac{1}{2}v(1,2)\right)\right\},$$

它对应着适当有序分割 $\langle\{1\},\{2\}\rangle$ 和 $\langle\{1,2\}\rangle$;

(iii) $v(2)=v(1)=\frac{1}{2}v(1,2)$, 这时也有

$$\mathrm{ESOS}(v)=\left\{\left(\frac{1}{2}v(1,2),\frac{1}{2}v(1,2)\right)\right\}=\{(v(1),v(2))\},$$

对应着三种适当有序分割 $\langle\{1\},\{2\}\rangle$, $\langle\{2\},\{1\}\rangle$ 和 $\langle\{1,2\}\rangle$;

(iv) $v(1)<\frac{1}{2}v(1,2)$, 那么 $\langle\{1,2\}\rangle$ 是唯一的适当有序分割, 并且

$$\mathrm{ESOS}(v)=\left\{\left(\frac{1}{2}v(1,2),\frac{1}{2}v(1,2)\right)\right\}.$$

例 4.3(简单博弈)　给定参与者集合 N 上的简单博弈 v (参见定义 1.3), 用 W^s 记含有最少元素的所有最小获胜联盟的集合. 在这种情况下有 $\mathrm{ESOS}(v)=\left\{\frac{1}{|S|}e^S\middle|S\in W^s\right\}$, 因为对任何适当有序分割 $\langle T_1,\cdots,T_K\rangle$, 都有 $T_1\in W^s$, 并且 T_1 中的所有参与者将获得收益 $\frac{1}{|T_1|}$, 而 $N\backslash T_1$ 中的参与者将获得收益 0.

例 4.4(手套博弈)　令 v 是参与者集合 N 上的手套博弈 (参见例 1.2),如果 $|L|=|R|$, 则 $\mathrm{ESOS}(v)=\left\{\left(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}\right)\right\}$, 它可以由很多适当有序分割产生, 其中这些分割中的每个元素 T_k 都具有性质 $|T_k\cap L|=|T_k\cap R|$. 在 $|L|>|R|$ 的情况下, 每个元素 $x\in\mathrm{ESOS}(v)$ 满足, 对每个 $i\in R$ 和 L 中的 $|R|$ 个元素, $x_i=\frac{1}{2}$; 对 L 中的其他元素, $x_i=0$. 反之, 所有这种类型的元素都属于 $\mathrm{ESOS}(v)$.

例 4.5(一个不满足超可加性的 2 人博弈)　令 v 是参与者集合 $N=\{1,2\}$ 上满足 $v(\varnothing)=v(1,2)=0$, $v(1)=3$, $v(2)=2$ 的博弈. 那么 $\langle\{1\},\{2\}\rangle$ 是唯一的适当有序分割, 并且 $\mathrm{ESOS}(v)=\{(3,-3)\}$.

由上面的例子很容易验证产生等分离分配的适当有序分割满足关于平均值的单调性, 下面的命题将对此表述.

命题 4.6 令 $v \in G^N$, $\langle T_1, \cdots, T_K \rangle$ 是 N 的关于 v 的一个适当有序分割, 那么对所有 $k \in \{1, \cdots, K-1\}$ 都有

$$\max_{S \in 2^{N \setminus \left(\bigcup_{s=1}^{k-1} T_s\right)} \setminus \{\varnothing\}} \frac{v_k(S)}{|S|} \geqslant \max_{S \in 2^{N \setminus \left(\bigcup_{s=1}^{k-1} T_s\right)} \setminus \{\varnothing\}} \frac{v_{k+1}(S)}{|S|}.$$

证明 由 T_k 的定义有

$$\frac{v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k-1} T_s\right)}{|T_k|} \geqslant \frac{v\left(\bigcup_{s=1}^{k+1} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k-1} T_s\right)}{|T_k| + |T_{k+1}|},$$

在不等式右端的分子中加上和减去 $v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right)$ 得

$$\frac{v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k-1} T_s\right)}{|T_k|} \geqslant \frac{v\left(\bigcup_{s=1}^{k+1} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right) + v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k-1} T_s\right)}{|T_k| + |T_{k+1}|},$$

这个不等式等价于

$$\begin{aligned} &\left(v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k-1} T_s\right)\right)|T_k| + \left(v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k-1} T_s\right)\right)|T_{k+1}| \\ \geqslant &\left(v\left(\bigcup_{s=1}^{k+1} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right)\right)|T_k| + \left(v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k-1} T_s\right)\right)|T_k|, \end{aligned}$$

它等价于

$$\left(v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k-1} T_s\right)\right)|T_{k+1}| \geqslant \left(v\left(\bigcup_{s=1}^{k+1} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{k} T_s\right)\right)|T_k|.$$

对于在任意的 crisp 博弈类上使用一致性性质 á la Hart-Mas-Colell[56] 的等分离集合的公理化描述, 建议读者参考文献 [127].

4.2.2 具有超可加性博弈的等分离集合

现在考虑超可加性博弈 (参见定义 1.14) 类的解概念另外一个有趣的性质. 事实上, 超可加性博弈的等分离集合是这个博弈等分核心的改进 (参见定义 2.14).

定理 4.7 令 v 是一个满足超可加性的博弈, 那么 $\mathrm{ESOS}(v) \subset \mathrm{EDC}(v)$.

证明 令 $x \in \mathrm{ESOS}(v)$ 是由适当有序分割 $\langle T_1, \cdots, T_K \rangle$ 产生的. 取 $S \in 2^N \setminus \{\varnothing\}$, 下面证明存在 $i \in S$ 满足 $x_i \geqslant \dfrac{v(S)}{|S|}$.

令 $m \in \{1, \cdots, K\}$ 是满足 $T_m \cap S \neq \varnothing$ 的最小数, 那么

$$\frac{v(S)}{|S|} \leqslant \frac{v\left(\left(\bigcup_{s=1}^{m-1} T_s\right) \bigcup S\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{m-1} T_s\right)}{|S|}$$
$$\leqslant \frac{v\left(\bigcup_{s=1}^{m} T_s\right) - v\left(\bigcup_{s=1}^{m-1} T_s\right)}{|T_m|}$$
$$= \frac{v_m(T_m)}{|T_m|} = \max_{T \in 2^{N \setminus \left(\bigcup_{s=1}^{m-1} T_s\right)} \setminus \{\varnothing\}} \frac{v_m(T)}{|T|},$$

其中, 第一个不等式由 v 的超可加性得到, 第二个不等式是由 T_m 的定义. 注意对每个 $i \in T_m \cap S$ 都有

$$x_i = \max_{T \in 2^{N \setminus \left(\bigcup_{s=1}^{m-1} T_s\right)} \setminus \{\varnothing\}} \frac{v_m(T)}{|T|} \geqslant \frac{v(S)}{|S|}.$$

因此, $x \in \mathrm{EDC}(v)$. 这蕴含着 $\mathrm{ESOS}(v) \subset \mathrm{EDC}(v)$.

下个例子表明等分离集合是等分核心的真子集.

例 4.8　令 $N = \{1, 2, 3\}$, 并且 v 是 $L = \{1, 2\}$ 和 $R = \{3\}$ 的手套博弈 (参见例 1.2), 那么 $\mathrm{EDC}(v) = \left\{x \in I(v) \middle| x_3 \geqslant \frac{1}{2}\right\}$, 但 $\mathrm{ESOS}(v) = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

注释 4.9　由定理 4.7 易知, 对于一个具有超可加性的博弈, 每个等分离分配都满足个体合理性. 正如在例 4.5 中显示的那样, 对不满足超可加性的博弈这不一定成立.

第 5 章　合作 crisp 博弈的类

这一章考虑合作 crisp 博弈的三个类：完全均衡博弈、凸博弈和宗族博弈. 首先介绍这些博弈的基本特征, 然后讨论已经介绍过的集值解概念和单点解概念的一些特殊性质. 进一步, 叙述在文献 [107] 中介绍的与这些博弈对应的人口单调分配机制, 并介绍整体宗族博弈的双单调分配机制概念, 以及凸博弈的受限平等解[45,46]等概念.

5.1　完全均衡博弈

5.1.1　基本特征和解概念的性质

令 $v \in G^N$, 博弈 v 称为是完全均衡的, 如果所有它的子博弈 (参见定义 1.9) 都是均衡的 (参见定义 1.19). 等价地, 博弈 v 是完全均衡的, 如果对所有的 $T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$ 都有 $C(v_T) \neq \varnothing$ (参见定理 2.4).

例 5.1　令 $v \in G^{\{1,2,3,4\}}$ 满足: 如果 $|S| = 0,1,3,4$ 时, 分别有 $v(S) = 0,0,1,2$, 并且 $v(1,21,3) = v(2,3) = 1$, $v(1,4) = v(2,4) = v(3,4) = 0$. 那么 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in C(v)$, 因此 v 是均衡的. 但是当 $T = \{1,2,3\}$ 时的子博弈 v_T 是不均衡的, 所以, v 不是完全均衡的.

例 5.2　令 $v \in G^{\{1,2,3,4\}}$ 满足: $v(1,2) = v(3,4) = \frac{1}{2}$, $v(1,2,3) = v(2,3,4) = v(1,2,4) = v(1,3,4) = \frac{1}{2}$, $v(1,2,3,4) = 1$, 对所有其他 $S \in 2^N$ 有 $v(S) = 0$, 那么 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \in C(v)$. 进一步, $\left(0,\frac{1}{2},0\right)$ 是 3 人子博弈核心中的元素, 并且也很容易得到 1 人和 2 人子博弈有非空核心, 因此, 博弈 v 是完全均衡的.

下列定理涉及非负博弈 (参见定义 1.2) 和可加博弈 (参见定义 1.3) 的完全均衡博弈.

定理 5.3[64]　令博弈 $v \in G^N$ 是完全均衡的和非负的, 则 v 是 $2^n - 1$ 个可加博弈的交.

证明　$v \in G^N$ 如上面所定义, 对 $T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 考虑对应的子博弈 v_T, 并取 $x_T \in C(v_T)$. 定义 $y_T \in \mathbb{R}^n$ 满足: 如果 $i \in T$ 则 $y_T^i := x_T^i$; 如果 $i \in N \backslash T$ 则 $y_T^i := \alpha$,

其中 $\alpha := \max_{S\in 2^N} v(S)$. 下面证明 v 等于 $\wedge_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}} w_T \left(:=\min\left\{w_T | T \in 2^N\setminus\{\varnothing\}\right\}\right)$, 其中 w_T 是一个对所有 $i \in N$ 都有 $w_T(i) = y_T^i$ 的可加博弈.

要证明对所有的 $S \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 有

$$\min\left\{w_T(S) | T \in 2^N\setminus\{\varnothing\}\right\} = v(S).$$

可以从下面得到:

(a) $w_S(S) = \sum_{i\in S} y_S^i = \sum_{i\in S} x_S^i = v_S(S) = v(S)$;

(b) 如果 $S\setminus T \neq \varnothing$, 则 $w_T(S) \geqslant \alpha \geqslant v(S)$, 其中第一个不等号是由博弈的非负性得到;

(c) 如果 $S \subset T$, 则 $w_T(S) = \sum_{i\in S}\sum_{i\in S} x_S^i \geqslant v_T(S) = v(S)$.

一个比较好的完全均衡博弈的例子是独裁控制的网络流. 网络流是一个有向网络, 这个有向网络包含分别称为源点和汇点的两个特殊点. 对于每个弧都有一个容量约束和一个关于限制使用这条弧的约束. 进一步, 借助于简单博弈 (参见定义 1.3) 的帮助, 对每个弧, 可以描述哪些联盟可以允许使用这条弧. 这些就是获胜联盟 (参见定义 1.4). 在这本书中, 这样的博弈称为控制博弈 (control game). 联盟 S 的值就是每单位时间从源点到汇点通过网络的最大流, 其中, 所使用的弧都是由 S 控制的. 显然, 独裁控制博弈是控制博弈, 所不同的是, 其中的弧由独裁者控制 (参见定义 1.6).

可以证明[64] 每个具有独裁控制的流博弈都是完全均衡的和非负的. 反之也是成立的.

定理 5.4[64]　令 $v \in G^N$ 是完全均衡的和非负的, 则 v 是一个具有独裁控制的流博弈.

证明　两个具有独裁控制的流博弈 $v, w \in G^N$ 的最小值 $v \wedge w$ 仍然是这样的一个流博弈: 将 v 和 w 的流网络串联连接. 同样, 一个可加博弈 v 是一个具有独裁控制的流博弈. 将这些事实和定理 5.3 结合就完成了证明.

5.1.2　完全均衡博弈和人口单调分配机制

完全均衡博弈的类包含具有人口单调分配机制 (population monotonic allocation scheme, pmas) 的博弈的类, pmas 的概念是在文献 [107] 中引进的. 这里的想法是, 由于联盟形成过程的复杂性, 参与者可能不会必然获得完全的有效性 (如果博弈满足超可加性, 参与者形成大联盟是有效的). 为了考虑部分联盟形成的可能性, 一个 pmas 不仅描述了如何分配 $v(N)$, 而且也描述了对每个 $S \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, 如何分配 $v(S)$. 进一步, 它反映出 “数量优势” ：即对每个成员分配到的份额随联盟的大小的增加而增加.

定义 5.5 令 $v \in G^N$, 机制 $a = (a_{iS})_{i\in S, S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}$(其中, $a_{iS} \in \mathbb{R}$) 是 v 的一个**人口单调分配机制** (pmas), 如果

(i) 对所有的 $S \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, 有 $\sum_{i\in S} a_{iS} = v(S)$;

(ii) 对所有满足 $S \subset T$ 的 $S, T \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, 以及 $i \in S$, 都有 $a_{iS} \leqslant a_{iT}$.

定义 5.6 令 $v \in G^N$, 转归 $b \in I(v)$ 是 **pmas 扩展**, 如果存在一个 pmas $a = (a_{iS})_{i\in S, S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}$, 满足对每个参与者 $i \in N$ 都有 $a_{iN} = b_i$.

从定义 5.5 易得, 一个博弈拥有 pmas 的必要条件是这个博弈是完全均衡的. 这个条件对于至多三个参与者的博弈来讲也是充分条件: 容易证明, 对于这样的博弈, 每个核心中的元素都是 pmas 扩展. 然而, 如果参与者数目至少是 4, pmas 的存在性不再保证, 如下例所示[107].

例 5.7 令 $v \in G^{\{1,2,3,4\}}$ 满足对 $i = 1, \cdots, 4$, 有 $v(i) = 0, v(1,2) = v(3,4) = 0$, $v(1,3) = v(1,4) = v(2,3) = v(2,4) = 1$, 对所有 $|S| = 3$ 有 $v(S) = 1$, $v(N) = 2$. 这个博弈的核心是连接 $(0,0,1,1)$ 和 $(1,1,0,0)$ 之间的线段. 容易看到, 这个博弈的每个子博弈都有非空核心, 也就是说, 这个博弈是完全均衡的. 但是, 这个博弈不存在 pmas, 可以从下面讨论中获得: 每个 pmas 必须满足 $a_{1N} \geqslant a_{1\{1,3,4\}} = 1$, $a_{2N} \geqslant a_{2\{2,3,4\}} = 1, a_{3N} \geqslant a_{3\{1,2,3\}} = 1$, 以及 $a_{4N} \geqslant a_{4\{1,2,4\}} = 1$. 因此, $\sum_{i\in N} a_{iN} \geqslant 4$, 这是不可能的.

对于博弈拥有 pmas 的其他一些必要和充分条件, 读者可以参考文献 [107].

5.2 凸 博 弈

合作博弈这个类是由文献 [104] 引进的. 除了很多凸博弈的等价特性之外, 这类博弈还有一些很好的性质: 这些博弈的核心是唯一的稳定集, 其极点很容易描述并且在凸博弈的圆锥体上是可加的[41,112]. 进一步, Shapley 值在作为边际向量的平均值这个意义上, 与核心的重心是一致的. 结果是, 在凸博弈的圆锥体上, AL 值和 Shapley 值是一致的. 进一步, 凸博弈的等分离集与该博弈的受限平等解是一致的 (参见第 5.2.3 节).

5.2.1 基本特征

定义 5.8 博弈 $v \in G^N$ 称为是**凸的**, 当且仅当对所有的 $S, T \in 2^N$ 都有

$$v(S \bigcup T) + v(S \bigcap T) \geqslant v(S) + v(T). \tag{5.1}$$

定义 5.9 博弈 $v \in G^N$ 称为是**凹的**, 当且仅当 $-v$ 是凸的.

下面, 用 CG^N 来表示具有参与者集合 N 的所有凸博弈的集合.

下一个定理给出凸博弈的 5 个特征. 特征 (ii) 和 (iii) 表示对于一个凸博弈, 当个体或群体加入较大联盟的时候, 其收益高于他们参加较小联盟的收益. 特征 (iv) 和 (v) 处理的是核心和 Weber 集[36,37,62,104] 之间的关系.

定理 5.10　令 $v \in G^N$, 下列 5 个断言是等价的:

(i) $v \in \mathrm{CG}^N$;

(ii) 对所有的 $S_1, S_2, U \in 2^N$, 其中 $S_1 \subset S_2 \subset N \backslash U$, 有

$$v(S_1 \bigcup U) - v(S_1) \leqslant v(S_2 \bigcup U) - v(S_2); \tag{5.2}$$

(iii) 对所有的 $S_1, S_2 \in 2^N$ 以及 $i \in N$, 满足 $S_1 \subset S_2 \subset N \backslash \{i\}$, 有

$$v(S_1 \bigcup \{i\}) - v(S_1) \leqslant v(S_2 \bigcup \{i\}) - v(S_2); \tag{5.3}$$

(iv) v 的所有 $n!$ 个边际向量 $m^\sigma(v)$ 都是 v 的核心 $C(v)$ 的元素;

(v) $W(v) = C(v)$.

证明　下面按 (i)⇒(ii), (ii)⇒(iii), (iii)⇒(iv), (iv)⇒(v), (v)⇒(i) 的顺序来证明.

(a) 假定 (i) 成立. 取 $S_1, S_2, U \in 2^N$, 其中 $S_1 \subset S_2 \subset N \backslash U$. 由 (5.1) 式, $S_1 \cup U$ 取代 S, 以及 S_2 取代 T, 注意到 $S \cup T = S_2 \cup U$, $S \cap T = S_1$ 就可获得 (5.2) 式. 因此, (i)⇒(ii).

(b) 若取 $U = \{i\}$, 则 (ii)⇒(iii) 是显然的.

(c) 假设 (iii) 成立. 令 $\sigma \in \pi(N)$, 并且取 m^σ. 那么 $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k^\sigma = v(N)$. 为了证明 $m^\sigma \in C(v)$, 需证明, 对于任何 $S \in 2^N$, 都有 $\sum\limits_{k \in S} m_k^\sigma \geqslant v(S)$.

令 $S = \{\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_k)\}$, 其中 $i_1 < \cdots < i_k$, 那么

$$\begin{aligned} v(S) &= \sum_{r=1}^{k} \left(v(\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_r)) - v(\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_{r-1}))\right) \\ &\leqslant \sum_{r=1}^{k} \left(v(\sigma(1), \cdots, \sigma(i_r)) - v(\sigma(1), \cdots, \sigma(i_r - 1))\right) \\ &= \sum_{r=1}^{k} m_{\sigma(i_r)}^\sigma = \sum_{k \in S} m_k^\sigma. \end{aligned}$$

其中的不等式来源于 (iii), 取 $r \in \{1, \cdots, k\}$, 令 $i := \sigma(i_r)$, $S_1 := \{\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_{r-1})\} \subset S_2 := \{\sigma(1), \cdots, \sigma(i_{r-1})\}$. 这就证明了 (iii)⇒(iv).

(d) 假定 (iv) 成立. 由于 $C(v)$ 是凸集, 有 $C(v) \supset \mathrm{co}\{m^\sigma | \sigma \in \pi(N)\} = W(v)$. 由定理 2.20 知 $C(v) \subset W(v)$, 因此, (iv)⇒(v).

(e) 最后证明 (v)⇒(i). 取 $S,T\in 2^N$, 那么存在 $\sigma\in\pi(N)$ 以及 $d,t,u\in\mathbb{N}$ 满足 $0\leqslant d\leqslant t\leqslant u\leqslant n$, 使得 $S\cap T=\{\sigma(i_1),\cdots,\sigma(d)\}$, $T\backslash S=\{\sigma(d+1),\cdots,\sigma(t)\}$, $S\backslash T=\{\sigma(t+1),\cdots,\sigma(u)\}$, $N\backslash(S\cup T)=\{\sigma(u+1),\cdots,\sigma(n)\}$. 由 (v) 得 $m^\sigma\in C(v)$, 因此,

$$v(S)\leqslant\sum_{i\in S}m_i^\sigma. \tag{5.4}$$

且有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S}m_i^\sigma&=\sum_{r=1}^{d}\left(v(A_r)-v(A_{r-1})\right)+\sum_{k=1}^{u-t}\left(v\left(T\bigcup B_{t+k}\right)-v\left(T\bigcup B_{t+k-1}\right)\right)\\&=v\left(S\bigcap T\right)+v\left(S\bigcup T\right)-v(T).\end{aligned} \tag{5.5}$$

其中

$$A_r=\{\sigma(1),\cdots,\sigma(r)\},$$

$$A_{r-1}=A_r\backslash\{\sigma(r)\},$$

$$B_{t+k}=\{\sigma(t+1),\cdots,\sigma(t+k)\},$$

以及

$$B_{t+k-1}=B_{t+k}\backslash\{\sigma(t+k)\}.$$

结合 (5.4) 式和 (5.5) 式就得到 (5.1) 式. 这就完成了证明.

定义 5.11[97] 博弈 $v\in G^N$ 称为是**精确的**, 如果对每个 $S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}$, 都有一个 $x\in C(v)$ 满足 $\sum_{i\in S}x_i=v(S)$.

注释 5.12 不难看出, 凸博弈是精确的.

注释 5.13 凸博弈使用它的子博弈 (参见定义 1.9) 的精确性来描述它的情况可参考文献 [8] 和 [15].

5.2.2 凸博弈和人口单调分配机制

正如在 5.1.2 节指出的那样, pmas (参见定义 5.5) 存在的必要条件是博弈的完全均衡性. pmas 存在的充分条件是博弈的凸性. 为了得到这一点, 需要下列定义.

对所有的 $\rho\in\pi(N)$, 以及所有的 $i\in N$, 令

$$N(\rho,i)=\{j\in N|\rho(j)\leqslant\rho(i)\}.$$

下面给出边际贡献向量 (参见定义 1.8) 的推广.

定义 5.14　令 $v \in G^N$, 以及 $\rho \in \pi(N)$. ρ 的**广义边际贡献向量** (extended vector of marginal contributions) 是向量 $a^\rho = (a^\rho_{iS})_{i\in S, S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}$, 其按分量定义为

$$a^\rho_{iS} = v\left(N\left(\rho,i\right)\cap S\right) - v\left(\left(N\left(\rho,i\right)\cap S\right)\setminus\{i\}\right).$$

命题 5.15[107]　令 $v \in \mathrm{CG}^N$, 那么每个广义边际贡献向量是 v 的一个 pmas.

证明　取 $v \in \mathrm{CG}^N$, $\rho \in \pi(N)$ 以及 a^ρ, 任选一个 $S \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 并且对所有 $i \in S$ 按照升序排列 $\rho(i)$. 令 $i, i' \in S$ 是两个参与者, 使得 i' 紧跟在 i 的后面. 观察到

$$a^\rho_{iS} = v\left(N\left(\rho,i\right)\cap S\right) - v\left(\left(N\left(\rho,i\right)\cap S\right)\setminus\{i\}\right)$$

和

$$\begin{aligned} a^\rho_{i'S} &= v\left(N\left(\rho,i'\right)\cap S\right) - v\left(\left(N\left(\rho,i'\right)\cap S\right)\setminus\{i'\}\right) \\ &= v\left(N\left(\rho,i'\right)\cap S\right) - v\left(N\left(\rho,i\right)\cap S\right). \end{aligned}$$

因此, $a^\rho_{iS} + a^\rho_{i'S} = v\left(N\left(\rho,i'\right)\cap S\right) - v\left(\left(N\left(\rho,i\right)\cap S\right)\setminus\{i\}\right)$, 重复这个讨论, 得到 $\sum\limits_{i\in S} a^\rho_{iS} = v(S)$, 这保证了 a^ρ 的可行性.

至于定义 5.5 中的单调性, 注意: 如果 $i \in S \subset T \subset N$, 那么 $S\cap N(\rho,i) \subset T\cap N(\rho,i)$ 对所有的 $i \in N$ 成立. 因此, 由 v 的凸性有 $a^\rho_{iS} \leqslant a^\rho_{iT}$, 这就完成了证明.

按照文献 [104], 凸博弈的核心是一个多面体, 它的极点是 (通常的) 边际贡献向量 (参见定理 5.10). 由于一个博弈 v 的 pmas 的每个凸组合仍然是这个博弈的 pmas, 所以得下面结论.

命题 5.16　令 $v \in \mathrm{CG}^N$, 以及 $b = (b_i)_{i\in N} \in C(v)$, 那么 b 是 pmas 扩展.

定义 5.17　令 $v \in G^N$, v 的**广义 Shapley 值**是向量 $\tilde{\Phi}(v)$, 按分量定义如下, 对所有的 $S \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 和所有的 $i \in S$, 有

$$\tilde{\Phi}_{iS}(v) = \Phi_i(v_S),$$

其中 $\Phi(v_S) = (\Phi_i(v_S))_{i\in S}$ 是博弈 v_S 的 Shapley 值.

正如在文献 [107] 中证明的那样, 广义 Shapley 值是广义边际贡献向量的算术平均值 (参见定义 5.14), 因此, 有下面结论.

命题 5.18　令 $v \in \mathrm{CG}^N$, 那么 v 的广义 Shapley 值是 v 的 pmas.

5.2.3　凸博弈的受限平等解

博弈 $v \in \mathrm{CG}^N$ 的核心的另一个元素是文献 [46] 引入的受限平等分配 $E(v)$, 它可以用简单方法描述, 并且很容易在有限步骤之内找到. 寻找受限平等分配 $E(v)$

用到了下面的关于博弈 v 的非空联盟 S 的特征函数的平均值 $\dfrac{v(S)}{|S|}$ 的两个引理.

引理 5.19 令 $v \in \mathrm{CG}^N$, $L(v) := \arg\max_{C\in 2^N\setminus\{\varnothing\}} \dfrac{v(C)}{|C|}$. 那么

(i) 集合 $L(v)\bigcup\{\varnothing\}$ 是一个格, 也就是说, 对所有的 $S_1, S_2 \in L(v)\bigcup\{\varnothing\}$, 有 $S_1\bigcap S_2 \in L(v)\bigcup\{\varnothing\}$, 以及 $S_1\bigcup S_2 \in L(v)\bigcup\{\varnothing\}$;

(ii) 在 $L(v)$ 中, 存在一个关于 $\subset$ 的最大元素, 即

$$\bigcup\ \{S|S \in L(v)\}.$$

证明

(i) 令 $\alpha := \max_{C\in 2^N\setminus\{\varnothing\}} \dfrac{v(C)}{|C|}$, 并且假定对某些 $S_1, S_2 \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 有 $\dfrac{v(S_1)}{|S_1|} = \alpha = \dfrac{v(S_2)}{|S_2|}$, 要证明

$$\frac{v(S_1\bigcup S_2)}{|S_1\bigcup S_2|} = \alpha \quad 以及 \quad v(S_1\bigcap S_2) = \alpha\,|S_1\bigcap S_2|. \tag{5.6}$$

由于

$$\begin{aligned}
&v(S_1\bigcup S_2) + v(S_1\bigcap S_2)\\
&= \frac{v(S_1\bigcup S_2)}{|S_1\bigcup S_2|}\,|S_1\bigcup S_2| + \frac{v(S_1\bigcap S_2)}{|S_1\bigcap S_2|}\,|S_1\bigcap S_2|\\
&\leqslant \alpha\,|S_1\bigcup S_2| + \alpha\,|S_1\bigcap S_2| = \alpha\,|S_1| + \alpha\,|S_2|\\
&= v(S_1) + v(S_2) \leqslant v(S_1\bigcup S_2) + v(S_1\bigcap S_2).
\end{aligned}$$

其中第一个不等式来自于 α 的定义, 第二个不等式来自于 $v \in \mathrm{CG}^N$. 因此, 无论如何等式是成立的, 这就证明了 (5.6) 式.

(ii) 这个断言直接来源于 (i) 和 $L(v)$ 的有限性.

引理 5.20 令 $v \in \mathrm{CG}^N$, $S \subset N$, $S \neq N$, 那么 $v^{-S} \in \mathrm{CG}^{N\setminus S}$, 其中对所有的 $T \in 2^{N\setminus S}$, 有

$$v^{-S}(T) := v(S\bigcup T) - v(S).$$

证明 令 $T_1 \subset T_2 \subset (N\setminus S)\setminus\{i\}$, 其中 $i \in N\setminus S$. 要证明 $v^{-S}(T_1\bigcup\{i\}) - v(T_1) \leqslant v^{-S}(T_2\bigcup\{i\}) - v(T_2)$. 这等价于证明 $v(S\bigcup T_1\bigcup\{i\}) - v(S\bigcup T_1) \leqslant v(S\bigcup T_2\bigcup\{i\}) - v(S\bigcup T_2)$, 而这直接来源于 v 的凸性.

注释 5.21 很容易看到 v^{-S} 是一个边际博弈 (参见 (4.1) 式).

由这两个引理, 按照下面的算法[46], 可以找到博弈 $v \in \mathrm{CG}^N$ 的受限平等分配 $E(v)$.

算法的第一步, 考虑博弈 $\langle N_1, v_1\rangle$, 其中, $N_1 := N$, $v_1 := v$, 以及对每一个 N_1 的非空子联盟 T 的人均值 $\frac{v_1(T)}{|T|}$, 那么取达到 $\arg\max_{T\in 2^{N_1}\setminus\{\varnothing\}} \frac{v_1(T)}{|T|}$ 的最大元素 $T_1 \in 2^{N_1}\setminus\{\varnothing\}$ (按照引理 5.19 这样的元素是存在的), 并且对所有的 $i \in T_1$, 定义 $E_i(v) = \frac{v_1(T)}{|T|}$. 如果 $T_1 = N$, 则算法停止.

在 $T_1 \neq N$ 的情况下, 则在算法的第二步, 考虑凸博弈 $\langle N_2, v_2\rangle$, 其中 $N_2 := N_1\setminus T_1$, 并且对每个 $S \in 2^{N_2}\setminus\{\varnothing\}$ (参见引理 5.20), 取 $v_2(S) = v_1(S\bigcup T_1) - v_1(T_1)$, 以及在 $\arg\max_{T\in 2^{N_2}\setminus\{\varnothing\}} \frac{v_2(T)}{|T|}$ 中的最大元素 T_2, 并且对所有的 $i \in T_2$, 定义 $E_i(v) = \frac{v_2(T)}{|T|}$. 如果 $T_1\bigcup T_2 = N$, 则算法停止; 否则, 继续考虑博弈 $\langle N_3, v_3\rangle$, 其中 $N_3 := N_2\setminus T_2$, 并且对每个 $S \in 2^{N_3}\setminus\{\varnothing\}$, 计算 $v_3(S) = v_2(S\bigcup T_2) - v_2(T_2)$, 依此类推. 在有限步后算法终止, 并且将获得的分配 $E(v) \in \mathbb{R}^n$ 称为博弈 $v \in \mathrm{CG}^N$ 的受限平等解.

定理 5.22　令 $v \in \mathrm{CG}^N$ 且 $E(v)$ 是受限平等解. 那么 $E(v) \in C(v)$.

证明　假定 $S_1, \cdots, S_m$ 是 N 的有序分割, $E(v)$ 是基于这个分割定义的, 因此, 如果 $i \in S_1$, 则

$$E_i(v) = \frac{1}{|S_1|} v(S_1),$$

以及对于 $k \geqslant 2$, 如果 $i \in S_k$, 则

$$E_i(v) = \frac{1}{|S_k|}\left(v\left(\bigcup_{r=1}^{k} S_r\right) - v\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} S_r\right)\right),$$

并且对所有的 $T \subset \bigcup_{r=k}^{m} S_r\,(k \geqslant 1)$, 有

$$\frac{v\left(\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} S_r\right)\bigcup T\right) - v\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} S_r\right)}{|T|} \leqslant \frac{v\left(\bigcup_{r=1}^{k} S_r\right) - v\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} S_r\right)}{|S_r|}. \tag{5.7}$$

首先, 证明 $E(v)$ 是有效的, 也就是说, $\sum_{i=1}^{n} E_i(v) = v(N)$, 这可以由下面得到:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} E_i(v) &= \sum_{i\in S_1} E_i(v) + \sum_{k=2}^{m}\sum_{i\in S_k} E_i(v)\\ &= v(S_1) + \sum_{k=2}^{m}\left(v\left(\bigcup_{r=1}^{k} S_r\right) - v\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} S_r\right)\right)\\ &= v\left(\bigcup_{r=1}^{m} S_r\right) = v(N).\end{aligned}$$

下面证明 $E(v)$ 的稳定性. 取 $S \subset N$, 首先要证明 $\sum_{i \in S} E_i(v) \geqslant v(S)$.

注意到 $S = \bigcup_{r=1}^{m} T_r$, 其中 $T_r := S \bigcap S_r \, (r = 1, \cdots, m)$, 那么

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in S} E_i(v) &= \sum_{i \in T_1} E_i(v) + \sum_{k=2}^{m} \sum_{i \in T_k} E_i(v) \\
&= |T_1| \frac{v(S_1)}{|S_1|} + \sum_{k=2}^{m} |T_k| \frac{\left(v\left(\bigcup_{r=1}^{k} S_r\right) - v\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} S_r\right)\right)}{|S_k|} \\
&\geqslant |T_1| \frac{v(T_1)}{|T_1|} + \sum_{k=2}^{m} |T_k| \frac{\left(v\left(\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} S_r\right) \bigcup T_k\right) - v\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} S_r\right)\right)}{|T_k|} \\
&\geqslant v(T_1) + \sum_{k=2}^{m} \left(v\left(\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} T_r\right) \bigcup T_k\right) - v\left(\bigcup_{r=1}^{k-1} T_r\right)\right) \\
&= v\left(\bigcup_{r=1}^{m} T_r\right) = v(S),
\end{aligned}$$

其中, 第一个不等式来源于 (5.7) 式, 第二个不等式由 v 的凸性以及注意到对所有的 $k \in \{2, \cdots, m\}$, 有 $\bigcup_{r=1}^{k-1} S_r \supset \bigcup_{r=1}^{k-1} T_r$ 而得到.

由于受限平等解是在对应的凸博弈的核心中, 故有必要研究 $E(v)$ 和在第 4.1 节介绍的由 Lorenz 准则得到的其他核心分配之间的相互关系. 这就得到了, 对于凸博弈, 受限平等解 Lorenz 占优其他每个核心分配, 对于这个结论的证明可以参考文献 [46].

有关在凸博弈范围内受限平等解的人口单调性的详细论述读者可参考文献 [45] 和 [58].

5.2.4 解概念的性质

现在讨论凸博弈类上解概念的性质.

首先很容易注意到, 由定理 5.10, 对每个博弈 $v \in \mathrm{CG}^N$, 它的 Shapley 值 $\Phi(v)$ 与核心 $C(v)$ 的重心是一致的. 进一步, 在凸博弈的锥上, 第 3.3 节介绍的 AL 值和 Shapley 值是一致的.

例 5.23 令 $v \in \mathrm{CG}^{\{1,2,3\}}$, 满足对每个 $i \in N$, 有 $v(i) = 0$; 如果 $|S| = 2$, 则 $v(S) = 10$, 并且 $v(N) = 30$. 那么 $L^{(1,2,3)}(v) = (20, 10, 0) = m^{(3,2,1)}(v)$, $L^{(1,3,2)}(v) = (20, 0, 10) = m^{(2,3,1)}(v)$, $\cdots$, $L^{(3,2,1)}(v) = (0, 10, 20) = m^{(1,2,3)}(v)$, 因此, $\mathrm{AL}(v) = (10, 10, 10) = \dfrac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} L^{\sigma}(v) = \dfrac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} m^{\overline{\sigma}}(v) = \Phi(v)$, 其中, $\overline{\sigma} = (\sigma(3), \sigma(2), \sigma(1))$ 是 σ 的逆序.

定理 5.24 令 $v\in \mathrm{CG}^N$, 那么 $\mathrm{AL}(v)=\Phi(v)$.

证明 注意对每个 $\sigma\in\pi(N)$, 有 $L^{\sigma}(v)=m^{\overline{\sigma}}(v)$, 其中 $\overline{\sigma}=(\sigma(n),\sigma(n-1),\cdots,\sigma(2),\sigma(1))$.

在研究与 AL 值的关系的时候, 精确博弈 (参见定义 5.11) 也起重要作用. 令 EX^N 表示具有参与者集合 N 的精确博弈的集合. 事实上, EX^N 是博弈的一个圆锥体, 并且很容易看到, $\mathrm{AL}:\mathrm{EX}^N\to\mathbb{R}^n$ 在 EX^N 的子圆锥体上是可加的, 其中对应的核心是可加的.

对于每个均衡博弈 $v\in G^N$, 都存在唯一一个与原博弈具有相同核心的精确博弈 $v^E\in\mathrm{EX}^N$. v 的精确化 v^E 定义为 $v^E(\varnothing)=0$, 并且对每个 $S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}$, 有

$$v^E(S)=\min\left\{\sum_{i\in S}x_i\middle|x\in C(v)\right\}.$$

因此, 对每个均衡博弈 v, 都有 $C\left(v^E\right)=C(v)$, 并且 $v^E=v$ 当且仅当 v 是精确的. 注意下述的 AL 值的有趣性质: 对于 $v,w\in G^N$, $C(v)=C(w)\neq\varnothing$ 蕴含 $\mathrm{AL}(v)=\mathrm{AL}(w)$. 这个性质等价于关于精确化的不变性: 对于每个均衡博弈 $v\in G^N$, $\mathrm{AL}(v)=\mathrm{AL}\left(v^E\right)$.

通过 AL 值的关于精确化的不变性, 可以证明对某些 $v\in G^N$, v 的 AL 值与 v 的精确化 v^E 的 Shapley 值是一致的. 对于一个满足它的精确化是凸的博弈 $v\in G^N$, 总有其 AL 值与其精确化的 Shapley 值是一致的这个结论成立.

定理 5.25 令 $v\in G^N$,

(i) 如果 v 是一个均衡 2 人博弈或 3 人博弈, 则 $\mathrm{AL}(v)=\Phi\left(v^E\right)$;

(ii) 如果 v 是一个单纯形博弈, 则 $\mathrm{AL}(v)=\Phi\left(v^E\right)$;

(iii) 如果 v 是一个对偶单纯形博弈, 则 $\mathrm{AL}(v)=\Phi\left(v^E\right)$.

证明 我们仅证明 (ii). 令 $v\in G^N$ 是一个单纯形博弈, 那么 $C(v)=I(v)=\mathrm{co}\{f^1(v),\cdots,f^n(v)\}$. 进一步, $v^E(N)=v(N)$, 并且对每个 $S\in 2^N\backslash\{\varnothing,N\}$: $v^E(S)=\min\left\{\sum_{i\in S}x_i\middle|x\in C(v)\right\}=\min\left\{\sum_{i\in S}f_i^k(v)\middle|k\in\{1,\cdots,n\}\right\}=\min\left\{\sum_{i\in S}v(i),v(N)-\sum_{i\in N\backslash S}v(i)\right\}=\sum_{i\in S}v(i)$, 这蕴含着 v^E 是凸博弈的和, 记为 $v^E=\sum_{i=1}^{n}v(i)u_{\{i\}}+\left(v(N)-\sum_{i=1}^{n}v(k)\right)u_N$ (其中 u_S 是 S 上的无异议博弈 (参见 (1.1) 式)). 因此, v^E 是凸博弈, 并且, 由定理 5.24, $\mathrm{AL}(v)=\mathrm{AL}\left(v^E\right)=\Phi\left(v^E\right)$.

下面给出一个 4 人精确博弈 v, 其中 $\Phi(v)=\Phi\left(v^E\right)\neq\mathrm{AL}(v)$. 这个例子与文献 [39] 中 91 页的例子有一点不同.

例 5.26 令 $\varepsilon \in (0,1]$, $v \in G^{\{1,2,3,4\}}$, 满足: 如果 $|S| = 2,3,4$ 时, 分别有 $v(S) = 7,12,22$, 并且 $v(1) = \varepsilon$, $v(2) = v(3) = v(4) = 0$. 注意, 因为 $v(1,2,3) - v(1,2) = 5 < v(1,3) - v(1) = 7 - \varepsilon$, $v \notin \mathrm{CG}^N$. 进一步注意到, 对于 4 人博弈, $C(v)$ 的极点集合包含 (最多) 24 个极点:

(i) 12 个极点是 (10, 5, 5, 2) 的排列,

(ii) 9 个极点是 (7, 7, 8, 0) 的排列, 但是第一个坐标不等于 0,

(iii) $(\varepsilon, 7-\varepsilon, 7-\varepsilon, 8+\varepsilon)$, $(\varepsilon, 7-\varepsilon, 8-\varepsilon, 7-\varepsilon)$ 以及 $(\varepsilon, 8-\varepsilon, 7-\varepsilon, 7-\varepsilon)$.

由此得到 v 是一个精确博弈, 并且, 每个字典序最大值 $L^\sigma(v)$ 等于向量 (10, 5, 5, 2) 的一个排列, 其中, 每个这样的排列对应两个序. 因此, $\mathrm{AL}(v) = \left(5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$ 并且与 $\Phi(v^E) = \Phi(v) = \left(5\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\varepsilon, 5\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\varepsilon, 5\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\varepsilon, 5\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\varepsilon\right)$不相等.

接下来证明当博弈是凸的时候, 合作博弈的等分离集合 (参见第 4.2 节) 和核心 (参见定义 2.3) 具有另外一些良好性质. 我们从等分离集合由一个单一分配组成来开始证明, 这个分配是该博弈的 Dutta-Ray 平等解.

令 $\langle D_1, \cdots, D_P \rangle$ 是按照寻找博弈 $v \in \mathrm{CG}^N$ 的受限平等解 $E(v)$ 的 Dutta-Ray 算法得到的 N 的有序分割. 在 Dutta-Ray 算法的每一步 $p \in \{1, \cdots, P\}$, 联盟 D_p 是下面集合的最大元素,

$$M^p := \arg \max_{S \in 2^{N \setminus \bigcup_{i=1}^{p-1} D_i} \setminus \{\varnothing\}} \frac{v\left(S \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{p-1} D_i\right)\right) - v\left(\bigcup_{i=1}^{p-1} D_i\right)}{|S|}.$$

由于, 对每个 $p \in \{1, \cdots, P\}$, 集合 M^p 是基于包含关系的偏序 (参见引理 5.19) 的格结构, 因此,

$$D_p = \bigcup \{D | D \in M^p\}.$$

对于每个 $p \in \{1, \cdots, P\}$, 令

$$d_p := \frac{v\left(D_p \bigcup \left(\bigcup_{r=1}^{p-1} D_r\right)\right) - v\left(\bigcup_{r=1}^{p-1} D_r\right)}{|D_p|}.$$

现在假定, 给定一个博弈 $v \in \mathrm{CG}^N$, 按照 Dutta-Ray 算法产生的它的有序分割为 $\langle D_1, \cdots, D_P \rangle$, 由适当有序分割 $\langle T_1, \cdots, T_K \rangle$ (参见定义 4.1) 产生的 v 的等分离集 $\mathrm{ESOS}(v)$ 中的一个分配为 $x = (x_i)_{i \in N}$, 那么有下面结果.

引理 5.27 令 $\frac{v(T_1)}{|T_1|} = a_1$, $k_1 \in \{1, \cdots, K\}$ 是满足 $\frac{v_{k_1}(T_{k_1})}{|T_{k_1}|} = a_1$ 的最大数. 那么 $a_1 = d_1$, 并且 $D_1 = \bigcup_{j=1}^{k_1} T_j$.

证明 由于 $T_1 \in M^1$, $D_1 = \bigcup \{D | D \in M^1\}$, 有 $T_1 \subseteq D_1$, 并且 $a_1 = \frac{v_1(T_1)}{|T_1|} = \frac{v(T_1)}{|T_1|} = d_1$. 接下来, 使用归纳法证明对每个 $k' \in \{1, \cdots, k_1\}$ 都有 $\bigcup_{j=1}^{k'} T_j \subseteq D_1$ 成立, 从而证明 $\bigcup_{j=1}^{k_1} T_j \subseteq D_1$.

对于 $k' = 1$ 结论是正确的. 假定存在 $k' \in \{1, \cdots, k_1 - 1\}$ 有 $\bigcup_{j=1}^{k'} T_j \subseteq D_1$ 成立, 下面证明 $\bigcup_{j=1}^{k'+1} T_j \subseteq D_1$ 也成立. 由于

$$\begin{aligned} d_1 |T_{k'+1}| = v_{k'+1}(T_{k'+1}) &= v_1\left(\bigcup_{j=1}^{k'+1} T_j\right) - v_1\left(\bigcup_{j=1}^{k'} T_j\right) \\ &= v_1\left(\bigcup_{j=1}^{k'+1} T_j\right) - d_1\left|\bigcup_{j=1}^{k'} T_j\right|, \end{aligned}$$

也就是说,

$$d_1\left|\bigcup_{j=1}^{k'+1} T_j\right| = v_1\left(\bigcup_{j=1}^{k'+1} T_j\right),$$

它蕴含 $\bigcup_{j=1}^{k'+1} T_j \subseteq D_1$. 因此, $\bigcup_{j=1}^{k'} T_j \subseteq D_1$.

下面证明 $\bigcup_{j=1}^{k_1} T_j = D_1$. 假定有 $V = D_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{k_1} T_j \neq \varnothing$. 首先, 从 k_1 的选择和命题 4.6, 对所有 $S \in 2^{N \setminus \bigcup_{j=1}^{k_1} T_j} \setminus \{\varnothing\}$, 有

$$\frac{v_{k_1+1}(S)}{|S|} < a_1 = d_1,$$

这蕴含了

$$\frac{v_{k_1+1}(V)}{|V|} < d_1. \tag{5.8}$$

另一方面,

$$\frac{v_{k_1+1}(V)}{|V|} = \frac{v_1(D_1) - v_1\left(\bigcup_{j=1}^{k_1} T_j\right)}{|V|} = \frac{d_1|D_1| - d_1\left|\bigcup_{j=1}^{k_1} T_j\right|}{|V|} = \frac{d_1|V|}{|V|} = d_1,$$

这与 (5.8) 式矛盾. 因此, $\bigcup_{j=1}^{k_1} T_j = D_1$.

定理 5.28 令 $v \in \mathrm{CG}^N$, 则 $\mathrm{ESOS}(v) = \{E(v)\}$.

证明 令 $\langle D_1, \cdots, D_P \rangle$ 是按照 Dutta-Ray 算法寻找 v 的受限平等解 $E(v) = (E_i(v))_{i \in N}$ 而产生的 N 的有序分割. 任取一个 v 的在等分离集 $\mathrm{ESOS}(v)$ 中的分

配 $x=(x_i)_{i\in N}$, 并且令它是由适当有序分割 $\langle T_1,\cdots,T_K\rangle$ 产生的. 用归纳法证明, 在 $p\in\{1,\cdots,P\}$ 上存在 $k_1^*,\cdots,k_p^*,\cdots,k_P^*\in\{1,\cdots,K\}$, 满足 $1\leqslant k_1^*<\cdots<k_p^*<\cdots<k_P^*\leqslant K$, 使得对每个 $p\in\{1,\cdots,P\}$ 以及每个 $j\in\{k_{p-1}^*+1,\cdots,k_p^*\}$, 都有

$$\bigcup_{j=k_{p-1}^*+1}^{k_p^*} T_j=D_p \quad 和 \quad \frac{v_j(T_j)}{|T_j|}=d_p. \tag{5.9}$$

对于 $p=1$, 令 $k_1^*=k_1$, 其中 $k_1\in\{1,\cdots,K\}$ 是满足 $\dfrac{v_{k_1}(T_{k_1})}{|T_{k_1}|}=a_1=\dfrac{v(T_1)}{|T_1|}$ 的最大数. 由引理 5.27, 有 $\bigcup\limits_{j=1}^{k_1}T_j=D_1$ 以及对每个 $j\in\{1,\cdots,k_1^*\}$ 有 $\dfrac{v_j(T_j)}{|T_j|}=d_1$.

假定对某些 $p\in\{1,\cdots,P-1\}$, 存在 k_p^* 使得 $k_{p-1}^*<k_p^*<K$ 并且 (5.9) 式成立, 我们证明, 存在 k_{p+1}^* 满足 $k_p^*<k_{p+1}^*\leqslant K$, 使得对每个 $j\in\{k_p^*+1,\cdots,k_{p+1}^*\}$, 有 $\bigcup\limits_{j=k_p^*+1}^{k_{p+1}^*}T_j=D_{p+1}$ 和 $\dfrac{v_j(T_j)}{|T_j|}=d_{p+1}$ 成立.

注意到 $\bigcup\limits_{j=1}^{k_p^*}T_j=\bigcup\limits_{l=1}^{p}D_l$ 蕴含以下两个博弈是一致: 博弈 $v_{k_p^*+1}$ 和博弈 v_{p+1} 是一致的, 其中 $v_{k_p^*+1}$: $2^{\left(N\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k_p^*}T_j\right)}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$v_{k_p^*+1}(S):=v\left(\left(\bigcup_{j=1}^{k_p^*}T_j\right)\cup S\right)-v\left(\bigcup_{j=1}^{k_p^*}T_j\right),$$

而 v_{p+1}: $2^{(N\setminus\bigcup_{l=1}^{p}D_l)}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$v_{p+1}(S):=v\left(\left(\bigcup_{l=1}^{p}D_l\right)\cup S\right)-v\left(\bigcup_{l=1}^{p}D_l\right).$$

令 $a_{k_p^*+1}=\dfrac{v_{k_p^*+1}\left(T_{k_p^*+1}\right)}{\left|T_{k_p^*+1}\right|}$ 以及 $k_{p+1}\in\left\{k_p^*+1,\cdots,K\right\}$为满足 $\dfrac{v_{k_{p+1}}\left(T_{k_{p+1}}\right)}{\left|T_{k_{p+1}}\right|}=a_{k_p^*+1}$ 的最大数. 取 $k_{p+1}^*=k_{p+1}$. 由于 $v_{k_p^*+1}$ 和 v_{p+1} 是一致的, 并根据它们的凸性[46], 可通过类似于引理 5.27 的讨论得到 (5.9) 式对 $p+1$ 也是成立的结论.

所以, 适当有序分割 $\langle T_1,\cdots,T_K\rangle$ 是 $\langle D_1,\cdots,D_P\rangle$ 的细分, 具有如下形式

$$\left\langle\left\langle T_1,\cdots,T_{k_1^*}\right\rangle,\left\langle T_{k_1^*+1},\cdots,T_{k_2^*}\right\rangle,\cdots,\left\langle T_{k_{P-1}^*+1},\cdots,T_{k_P^*}\right\rangle\right\rangle$$

满足 $T_{k_P^*}=T_K$, 并且对 D_p 的每个分割 $\left\langle T_{k_{p-1}^*+1},\cdots,T_{k_p^*}\right\rangle$, $p\in\{1,\cdots,P\}$, 元素 T_k 的成员获得同样的支付, 这里 $k\in\left\{k_{p-1}^*+1,\cdots,k_p^*\right\}$ 满足 $k_0^*=0$. 这样, 对每个 $v\in\mathrm{CG}^N$, 有 $x=E(v)$ 蕴含 $\mathrm{ESOS}(v)=\{E(v)\}$.

最后, 关于凸博弈有下面的结果.

定理 5.29[104]　令 $v \in \mathrm{CG}^N$, 则 $C(v)$ 是唯一的稳定集.

证明　考虑到定理 2.12, 只需证明 $C(v)$ 是稳定的. 如果 v 是可加的, 它显然是成立的. 下面假定 v 是不可加的.

令 $y \in I(v) \backslash C(v)$, 取 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$ 使得

$$\frac{v(S) - \sum_{i \in S} y_i}{|S|} = \max_{C \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} \frac{v(C) - \sum_{i \in C} y_i}{|C|}. \tag{5.10}$$

然后, 取 $z \in C(v)$ 满足 $\sum_{i \in S} z_i = v(S)$, 由注释 5.12 知这是可能的.

令 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$x_i := \begin{cases} y_i + \dfrac{v(S) - \sum_{i \in S} y_i}{|S|}, & \text{如果 } i \in S, \\ z_i, & \text{否则}. \end{cases}$$

那么 $x \in I(v)$ 并且 $x \operatorname{dom}_S y$. 为了证明 $x \in C(v)$, 首先注意到对于 $T \in 2^N$, $T \cap S \neq \varnothing$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i \in T \cap S} x_i &= \sum_{i \in T \cap S} (x_i - y_i) + \sum_{i \in T \cap S} y_i \\ &= |T \cap S| \frac{v(S) - \sum_{i \in S} y_i}{|S|} + \sum_{i \in T \cap S} y_i \\ &\geqslant \left(v(T \cap S) - \sum_{i \in T \cap S} y_i \right) + \sum_{i \in T \cap S} y_i = v(T \cap S), \end{aligned}$$

其中不等式成立来源于 (5.10) 式.

但是, 因为 $z \in C(v)$, $\sum_{i \in S} z_i = v(S)$, 以及 $v \in \mathrm{CG}^N$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i \in T} x_i &= \sum_{i \in T \cap S} x_i + \sum_{i \in T \backslash S} z_i \\ &\geqslant v(T \cap S) + \sum_{i \in T \bigcup S} z_i - \sum_{i \in S} z_i \\ &\geqslant v(T \cap S) + v(T \cup S) - v(S) \geqslant v(T). \end{aligned}$$

由于 $z \in C(v)$, 对于 $T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, $T \cap S \neq \varnothing$, 有 $\sum_{i \in T} x_i = \sum_{i \in T} z_i \geqslant v(T)$, 因此证明了 $x \in C(v)$.

那么 $I(v)=C(v)\cup \mathrm{dom}(C(v))$ 以及 $C(v)\cap \mathrm{dom}(C(v))=\varnothing$, 因此, $C(v)$ 是稳定集.

5.3 宗族博弈

宗族博弈在文献 [89] 中引进, 用以对 "有权" 参与者 (宗族成员) 和 "无权" 参与者 (非宗族成员) 之间的社会冲突建模的. 在一个宗族博弈中, 有权参与者有否决权利, 无权参与者在组织中获得的利益比他们自己单独获得的利益更多. 在文献 [27], [77], [89], [117] 和 [122] 中提供了这样的宗族博弈的经济应用问题, 如破产问题、生产经济、支持情况和信息获取等.

5.3.1 解概念的基本特征和性质

定义 5.30 博弈 $v\in G^N$ 是一个具有宗族 $C\in 2^N\backslash\{\varnothing,N\}$ 的**宗族博弈**, 如果它满足下列四个条件:

(a) 非负性. 对所有 $S\subset N$ 都有 $v(S)\geqslant 0$.

(b) 对大联盟的非负边际贡献. 对每个参与者 $i\in N$ 都有 $M_i(N,v)\geqslant 0$.

(c) 宗族性. 每个参与者 $i\in C$ 是否决参与者, 也就是说, 对每个不含 C 的联盟 S 都有 $v(S)=0$.

(d) 联盟性质. 如果 $C\subset S$, 则 $v(N)-v(S)\geqslant \sum\limits_{i\in N\backslash S} M_i(N,v)$.

如果宗族只包含一个成员, 则对应的博弈称为大老板博弈 (big boss game)[77].

下个命题表明, 宗族博弈的核心有一个有趣的形状.

命题 5.31[89] 令博弈 $v\in G^N$ 是一个宗族博弈, 那么

$$C(v)=\left\{x\in I(v)\,|\, 对所有的\ i\in N\backslash C, 有\ x_i\leqslant M_i(N,v)\right\}.$$

证明 假定 $x\in C(v)$, 那么对所有的 $i\in N\backslash C$, 都有 $\sum\limits_{j\in N\backslash\{i\}} x_j\geqslant v(N\backslash\{i\})$.

因为 $v(N)=\sum\limits_{i\in N} x_i=\sum\limits_{j\in N\backslash\{i\}} x_j+x_i$, 则

$$\begin{aligned} x_i &= v(N)-\sum_{j\in N\backslash\{i\}} x_j \leqslant v(N)-v(N\backslash\{i\}) \\ &= M_i(N,v), \quad 对所有\ i\in N\backslash C. \end{aligned}$$

反过来, 若 $x\in I(v)$, 并且对所有的 $i\in N\backslash C$, 有 $x_i\leqslant M_i(N,v)$, 那么对不含 C 的联盟 S, 有 $\sum\limits_{i\in S} x_i\geqslant 0=v(S)$. 那么由定义 5.30 的条件 (d), 得

$$v(N) - v(S) \geqslant \sum_{i \in N \backslash S} M_i(N, v) \geqslant \sum_{i \in N \backslash S} x_i.$$

因为 $v(N) = \sum_{i \in N} x_i$, 所以 $\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$, 即 $x \in C(v)$.

事实上, 下列命题表明, 宗族博弈可以完全被它的核心的形状来描述.

命题 5.32[89]　令 $v \in G^N$ 且 $v \geqslant 0$, 则 v 是宗族博弈当且仅当

(i) 对所有的 $j \in C$, 有 $v(N) e^j \in C(v)$;

(ii) 至少存在一个元素 $x \in C(v)$, 使得对所有 $i \in N \backslash C$, 有 $x_i = M_i(N, v)$.

证明　只需证明充分性. 假定 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$ 不含 C, 取 $j \in C \backslash S$. 因为 $x := v(N) e^j \in C(v)$, 有 $\sum_{i \in S} x_i = 0 \geqslant v(S)$, 并由 $v \geqslant 0$, 可以得到在定义 5.30 中的宗族性.

如果 $C \subset S$, $x \in C(v)$, 并且对所有 $i \in N \backslash C$, 有 $x_i = M_i(N, v)$, 则

$$v(S) \leqslant \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in N \backslash S} x_i = v(N) - \sum_{i \in N \backslash S} M_i(N, v),$$

这就证明了定义 5.30 中的联盟性质.

进一步, 对所有 $i \in N \backslash C$, $M_i(N, v) = x_i \geqslant v(i) = 0$.

现在, 集中讨论大老板博弈的 AL 值 (参见第 3.3 节). 注意, 按照命题 5.31, 以 n 作为大老板的大老板博弈 v 的核心的极点具有形式 P^T, 其中, $T \subseteq N \backslash \{n\}$, 并且如果 $i \in T$, $P_i^T = M_i(v)$; 如果 $i \in N \backslash (T \bigcup \{n\})$, $P_i^T = 0$; $P_n^T = v(N) - \sum_{i \in T} M_i(v)$. 对每个 $\sigma \in \pi(N)$, 则字典序最大 $L^\sigma(v)$ 等于 $P^{T(\sigma)}$, 其中, $T(\sigma) = \{i \in N \backslash \{n\} \mid \sigma(i) < \sigma(n)\}$.

定理 5.33　令 $v \in G^N$ 是以 n 作为大老板的大老板博弈, 则 $\mathrm{AL}(v) = \tau(v)$.

证明　对每个 $i \in N \backslash \{n\}$, 有 $\mathrm{AL}_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} (L^\sigma(v))_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} \left(P^{T(\sigma)}\right)_i$

$= \frac{1}{n!} M_i(v) \left|\{\sigma \in \pi(N) \mid \sigma(i) < \sigma(n)\}\right| = \frac{1}{2} M_i(v) = \tau_i(v)$.

最后, 由于 τ–值和 AL–值是有效的, 因此也得到 $\mathrm{AL}_n(vv) = \tau_n(v)$.

下面考察以 n 作为大老板的大老板博弈 v 的精确化 v^E. 对于 $S \subseteq N \backslash \{n\}$, 有

$$v^E(S) = \min_{T \subseteq N \backslash \{n\}} \sum_{i \in S} P_i^T = \sum_{i \in S} P_i^\Phi = 0,$$

同时, 对于 $S \subseteq N$, 以及 $n \in S$, 有

$$v^E(S) = \min_{T \subseteq N \backslash \{n\}} \sum_{i \in S} P_i^T = \min_{T \subseteq N \backslash \{n\}} \left(v(N) - \sum_{i \in T \backslash S} M_i(v) \right)$$

$$= \sum_{i \in S} P_i^{N \backslash \{n\}} = \left(v(N) - \sum_{i=1}^{n-1} M_i(v) \right) + \sum_{i \in S} M_i(v).$$

这蕴含着 v^E 是一个凸无异议博弈的非负组合:

$$v^E(S) = \left(v(N) - \sum_{i=1}^{n-1} M_i(v) \right) u_{\{n\}} + \sum_{i \in N \backslash \{n\}} M_i(v) u_{\{i,n\}}.$$

因此, v^E 是一个凸博弈 (也是一个大老板博弈), 并且, $C(v)$ 和 $C(v^E)$ 的极点是一致的. 因此得到, $\tau(v) = \mathrm{AL}(v) = \mathrm{AL}(v^E) = \Phi(v^E)$.

定理 5.34 令 $v \in G^N$ 是以 n 作为大老板的大老板博弈, 则 $\mathrm{AL}(v) = \Phi(v^E)$.

5.3.2 完全宗族博弈和单调分配机制

完全宗族博弈的子博弈跟原 (宗族) 博弈具有相同结构, 由此得下面内容.

定义 5.35 博弈 $v \in G^N$ 是一个具有宗族 $C \in 2^N \backslash \{\varnothing, N\}$ 的**完全宗族博弈**, 如果对每个联盟 $S \supset C$, v_S 是一个 (具有宗族 C 的) 宗族博弈.

注意, 在定义 5.35 中, 我们的注意力只放在包含 C 的联盟上, 这是因为由 v 的宗族性可知其他 (联盟不包含 C 的) 子博弈的特征函数为 0 函数.

下一个定理介绍了完全宗族博弈的一个特征, 其证明读者可以参考文献 [122].

定理 5.36 令 $v \in G^N$, $C \in 2^N \backslash \{\varnothing, N\}$, 下列断言是等价的:

(i) v 是一个具有宗族 C 的完全宗族博弈;

(ii) v 是单调的, 每个 $i \in C$ 是否决参与者, 并且对所有满足 $S \supset C$ 和 $T \supset C$ 的联盟 S 和 T, 有

$$S \subset T \quad \text{蕴含} \quad v(T) - v(S) \geqslant \sum_{i \in T \backslash S} M_i(T, v); \tag{5.11}$$

(iii) v 是单调的, 每个 $i \in C$ 是否决参与者, 并且对所有满足 $S \supset C$ 和 $T \supset C$ 的联盟 S 和 T, 有

$$S \subset T \text{ 和 } i \in S \backslash C \quad \text{蕴含} \quad M_i(S, v) \geqslant M_i(T, v). \tag{5.12}$$

可研究这样的问题: 完全宗族博弈是否有 pmas (参见定义 5.5, 定义 5.6). 文献 [122] 会将研究限制在联盟 $S \supset C$ 的 $v(S)$ 的分配上, 因为对于其他联盟, 由宗族性知其值为 0.

定理 5.37[122] 令博弈 $v \in G^N$ 是一个具有宗族 $C \in 2^N \backslash \{\varnothing, N\}$ 的完全宗族博弈, 令 $b \in C(v)$, 那么 b 是 pmas 扩展.

证明 按照命题 5.31 有

$$C(v) = \left\{ x \in I(v) \mid \text{对所有的 } i \in N \backslash C,\ x_i \leqslant M_i(N, v) \right\}.$$

因此, 对每个参与者 $i \in N$, 存在一个数 $\alpha_i \in [0,1]$ 满足 $\sum\limits_{i\in C}\alpha_i = 1$, 以及

$$b_i = \begin{cases} \alpha_i M_i(N,v), & \text{如果 } i \in N\backslash C, \\ \alpha_i\left[v(N) - \sum\limits_{j\in N\backslash C}\alpha_j M_j(N,v)\right], & \text{如果 } i \in C. \end{cases}$$

换句话说, 每个非宗族成员收获他对大联盟的边际贡献的一小部分, 而宗族成员分配剩下的部分.

对每个 $S \supset C$ 和 $i \in S$, 定义

$$a_{iS} = \begin{cases} \alpha_i M_i(N,v), & \text{如果 } i \in S\backslash C, \\ \alpha_i\left[v(S) - \sum\limits_{j\in S\backslash C}\alpha_j M_j(N,v)\right], & \text{如果 } i \in C. \end{cases}$$

显然, 对每个 $i \in N$, 有 $a_{iN} = b_i$. 下面继续证明向量 $(a_{iS})_{i\in S, S\supset C}$ 是一个 pmas. 由于 $\sum\limits_{i\in C}\alpha_i = 1$, 那么 $\sum\limits_{i\in S}a_{iS} = v(S)$. 现在令 $S \supset C, T \supset C$ 和 $i \in S \subset T$.

- 如果 $i \notin C$, 那么 $a_{iS} = a_{iT} = \alpha_i M_i(N,v)$;
- 如果 $i \in C$, 那么

$$\begin{aligned} a_{iT} - a_{iS} &= \alpha_i\left[v(T) - \sum_{j\in T\backslash C}\alpha_j M_j(N,v)\right] - \alpha_i\left[v(S) - \sum_{j\in S\backslash C}\alpha_j M_j(N,v)\right] \\ &= \alpha_i\left[v(T) - v(S) - \sum_{j\in T\backslash S}\alpha_j M_j(N,v)\right] \\ &\geqslant \alpha_i\left[v(T) - v(S) - \sum_{j\in T\backslash S}M_j(N,v)\right] \\ &\geqslant \alpha_i\left[v(T) - v(S) - \sum_{j\in T\backslash S}M_j(T,v)\right] \geqslant 0, \end{aligned}$$

这里第一个不等式来源于边际贡献的非负性, 以及对每个 $j \in N\backslash C$ 有 $\alpha_j \leqslant 1$ 这个事实, 第二个不等式来源于 (5.12) 式, 最后一个不等式来源于 (5.11) 式, 以及对每个 $i \in C$ 有 α_i 非负这个事实. 所以, $(a_{iS})_{i\in S, S\supset C}$ 是一个 pmas.

反之, 当联盟变大的时候, pmas 分配给每个参与者一个更大的支付, 在完全宗族博弈中, 性质 (5.12) 给出一个稍有不同的方法: 每个非宗族成员的边际贡献, 实际上随着联盟的增大是递减的. 考虑到这一因素, 在一个较大的联盟中, 给每个非宗族成员实际上分配一个较少部分. 此外, (在完全宗族博弈中) 为了保持 (子博弈

分配的) 稳定性, 这样的分配仍然应该给出在子博弈中的核心分配. 满足这些性质的分配机制称为双单调分配机制[122].

定义 5.38 令 $v \in G^N$ 是一个具有宗族 $C \in 2^N \setminus \{\varnothing, N\}$ 的完全宗族博弈, 博弈 v 的一个**双单调分配机制** (bi-monotonic allocation scheme, bi-mas) 是实数向量 $a = (a_{iS})_{i \in S, S \supset C}$, 满足

(i) 对所有的 $S \in 2^C \setminus \{\varnothing\}$, 有 $\sum\limits_{i \in S} a_{iS} = v(S)$;

(ii) 对满足 $S \subset T$ 和 $i \in S \cap C$ 的所有 $S \supset C, T \supset C$, 有 $a_{iS} \leqslant a_{iT}$;

(iii) 对满足 $S \subset T$ 和 $i \in S \backslash C$ 的所有 $S \supset C, T \supset C$, 有 $a_{iS} \geqslant a_{iT}$;

(iv) 对每个联盟 $S \supset C$, $(a_{iS})_{i \in S}$ 是子博弈 v_S 的一个核心元素.

定义 5.39 令 $v \in G^N$ 是一个具有宗族 $C \in 2^N \setminus \{\varnothing, N\}$ 的完全宗族博弈, 一个转归 $b \in I(v)$ 是 **bi-mas 扩展**, 如果存在一个 bi-mas $a = (a_{iS})_{i \in S, S \supset C}$ 满足, 对每个参与者 $i \in N$, $a_{iN} = b_i$.

定理 5.40[122] 令 $v \in G^N$ 是一个具有宗族 $C \in 2^N \setminus \{\varnothing, N\}$ 的完全宗族博弈, $b \in C(v)$, 那么 b 是 bi-mas 扩展.

证明 正如在定理 5.37 中证明的那样, 取 $(\alpha_i)_{i \in N} \in [0,1]^N$, 对每个 $S \supset C$ 及 $i \in S$ 定义

$$a_{iS} = \begin{cases} \alpha_i M_i(S, v), & \text{如果 } i \in S \backslash C, \\ \alpha_i \left[v(S) - \sum\limits_{j \in S \backslash C} \alpha_j M_j(S, v) \right], & \text{如果 } i \in C. \end{cases}$$

我们证明 $a = (a_{iS})_{i \in S, S \supset C}$ 是一个 bi-mas. 由于 $\sum\limits_{i \in C} \alpha_i = 1$, 有 $\sum\limits_{i \in S} a_{iS} = v(S)$. 现在令 $S \supset C, T \supset C$ 和 $i \in S \subset T$.

- 如果 $i \in N \backslash C$, 那么由 (5.12) 式, $a_{iS} = \alpha_i M_i(S, v) \geqslant \alpha_i M_i(T, v) = a_{iT}$;
- 如果 $i \in C$, 那么

$$\begin{aligned} a_{iT} - a_{iS} &= \alpha_i \left[v(T) - \sum_{j \in T \backslash C} \alpha_j M_j(T, v) \right] \\ &\quad - \alpha_i \left[v(S) - \sum_{j \in S \backslash C} \alpha_j M_j(S, v) \right] \\ &= \alpha_i \left[v(T) - v(S) - \sum_{j \in T \backslash S} \alpha_j M_j(T, v) \right] \\ &\quad + \alpha_i \left[\sum_{j \in S \backslash C} \alpha_j \left(M_j(S, v) - M_j(T, v) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\geqslant \alpha_i \left[v(T) - v(S) - \sum_{j \in T \setminus S} \alpha_j M_j(T, v) \right] \geqslant 0,$$

其中, 第一个不等式来源于 (5.12) 式和 $(\alpha_j)_{j \in T \setminus S}$ 的非负性, 第二个不等式来源于 (5.11) 式和对每个 $i \in C$ 有 α_i 非负.

最后, 对每个联盟 $S \supset C$, 已经证明向量 $a = (a_{iS})_{i \in S, S \supset C}$ 是宗族博弈 v_S 的核心分配. 令 $S \supset C$, 按照命题 5.31 有

$$C(v) = \left\{ x \in I(v) \,|\text{对所有的} i \in N \setminus C,\ x_i \leqslant M_i(N, v) \right\}.$$

令 $i \in S \setminus C$, 那么 $a_{iS} = \alpha_i M_i(S, v) \leqslant M_i(S, v)$, 同样, $\sum_{i \in S} a_{iS} = v(S)$, 因此, $(\alpha_{iS})_{i \in S}$ 满足有效性.

为了证明个体合理性, 考虑下面三种情况:

- 令 $i \in S \setminus C$, 那么, $a_{iS} = \alpha_i M_i(S, v) \geqslant 0 = v(i)$;
- 令 $i \in S \cap C$, $|C| = 1$, 那么 $C = \{i\}$ 和由构造 $\alpha_i = \sum_{j \in C} \alpha_j = 1$, 因此, $a_{iS} \geqslant a_{iC} = \alpha_i v(C) = v(i)$;
- 令 $i \in S \cap C$, $|C| > 1$, 由于 C 中的每个参与者都是否决参与者, 那么 $a_{iS} \geqslant a_{iC} = \alpha_i v(C) \geqslant 0 = v(i)$.

因此, $(a_{iS})_{i \in S, S \supset C}$ 是一个 bi-mas.

5.4　凸博弈与宗族博弈

这一节讨论凸博弈类和宗族博弈类的共同性质[22]. 我们从证明这两个博弈类中的每个博弈都可以用适当定义的边际博弈的性质来描述开始, 进一步, 研究一般凸博弈和完全宗族博弈之间的对偶性并且对其证明, 由一个对宗族具有 0 值的完全宗族博弈开始, 利用它的对偶博弈以及限制它到非宗族成员上, 来导出一个单调凸博弈. 反过来, 可以从一个单调凸博弈开始, 利用它的对偶博弈以及指派给不包含一定参与者的每个联盟一个 0 值, 可以建立一个对于宗族为 0 值的完全宗族博弈. 最后, 用来构造对应博弈的这种方法 (“对偶化和限制” 与 “对偶化和扩展”) 对研究对应博弈的核心中的元素与 Weber 集中的元素之间的关系也是有用的.

下面, 由于博弈中参与者集合的重要性, 我们将 $v \in G^N$ 写成 (N, v) 的形式.

5.4.1　边际博弈的特性

给定一个博弈 (N, v) 和一个联盟 $T \subseteq N$, T-边际博弈 $v^T : 2^{N \setminus T} \to \mathbb{R}$ 定义为, 对每个 $S \subseteq N \setminus T$ (参见 (4.1) 式)

$$v^T(S) := v(S \bigcup T) - v(T).$$

正如已经知道的那样, 如果一个博弈是凸的, 那么它的所有边际博弈也是凸的 (参见引理 5.20). 下一个例子显示博弈的超可加性 (参见定义 1.14) 不一定被它的边际博弈所继承.

例 5.41 令 $N = \{1,2,3\}$, $v(\{1\}) = 10$, $v(\{1,2\}) = 12$, $v(\{1,3\}) = 11$, $v(\{1,2,3\}) = 12\frac{1}{2}$, 对所有其他 $S \subset N$ 有 $v(S) = 0$. 显然, 博弈 (N,v) 是超可加的. 它的 $\{1\}$-边际博弈由 $v^{\{1\}}(\{2\}) = v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 2$, $v^{\{1\}}(\{3\}) = 11 - 10 = 1$, $v^{\{1\}}(\{2,3\}) = 2\frac{1}{2}$ 给出. 由于 $v^{\{1\}}(\{2,3\}) = 2\frac{1}{2} < 3 = v^{\{1\}}(\{2\}) + v^{\{1\}}(\{3\})$, 边际博弈 $\left\{(2,3), v^{\{1\}}\right\}$ 不是超可加的.

结果是, 博弈 (N,v) 的所有边际博弈的超可加性保证了一个比 (N,v) 的超可加性强的性质, 即 (N,v) 的凸性. 此结果的证明可参考文献 [20] 和 [71].

命题 5.42 博弈 (N,v) 是凸的, 当且仅当, 对每个 $T \in 2^N$, T-边际博弈 $\left(N\backslash T, v^T\right)$ 是超可加的.

注释 5.43 根据命题 5.42, 博弈 (N,v) 是凹的 (参见定义 5.9), 当且仅当对每个 $T \in 2^N$, 边际博弈 $\left(N\backslash T, v^T\right)$ 是次可加的 (参见定义 5.15).

现在考虑完全宗族博弈 (参见定义 5.35) 并使用适当定义的边际博弈来描述它的特性. 对于一个具有宗族 $C \in 2^N\backslash\{\varnothing, N\}$ 的宗族博弈 (N,v), 定义 $\mathcal{P}^C := \{S \subseteq N | C \subseteq S\}$ 作为包含 C 的所有联盟的集合. 由定理 5.36 (iii), 一个博弈 (N,v) 是具有宗族 C 的完全宗族博弈当且仅当 (N,v) 是单调的, 每个参与者 $i \in C$ 是否决参与者, 以及对所有联盟 $S_1, S_2 \in \mathcal{P}^C$, 下面的 C–凹性满足

$$S_1 \subseteq S_2 \text{ 和 } i \in S_1\backslash C \quad \text{蕴含} \quad M_i(S_1,v) \geqslant M_i(S_2,v).$$

为了下面的应用, 我们用 $\mathrm{MV}^{N,C}$ 表示所有 N 上对每个参与者 $i \in C$ 满足否决参与者性质的单调博弈的集合.

命题 5.44 令 $(N,v) \in \mathrm{MV}^{N,C}$, 那么 (N,v) 是具有宗族 C 的完全宗族博弈当且仅当边际博弈 $\left(N\backslash C, v^C\right)$ 是一个凹博弈.

证明 令 $(N,v) \in \mathrm{MV}^{N,C}$ 是一个具有宗族 C 的完全宗族博弈, 那么, 对 $i \in S \subseteq T \subseteq N$, 有

$$\begin{aligned} v^C(S) - v^C(S\backslash\{i\}) &= v(C \bigcup S) - v((C \bigcup S)\backslash\{i\}) \\ &\geqslant v(C \bigcup T) - v((C \bigcup T)\backslash\{i\}) \\ &= v^C(T) - v^C(T\backslash\{i\}), \end{aligned}$$

其中, 不等式来源于 (N,v) 的 C–凹性. 因此, (N,v) 是凹博弈.

现在假定 $(N\backslash C, v^C)$ 是一个凹博弈, 令 $S_1, S_2 \in \mathcal{P}^C$, $S_1 \subseteq S_2$ 和 $i \in S_1\backslash C$, 那么

$$\begin{aligned} M_i(S_1, v) &= v(S_1) - v(S_1\backslash\{i\}) \\ &= v^C(S_1\backslash C) - v^C((S_1\backslash C)\backslash\{i\}) \\ &\geqslant v^C(S_2\backslash C) - v^C((S_2\backslash C)\backslash\{i\}) = M_i(S_2, v), \end{aligned}$$

其中, 不等式来源于 $(N\backslash C, v^C)$ 的凹性. 这样, (N, v) 是一个具有宗族 C 的完全宗族博弈.

给定一个博弈 $(N, v) \in \mathrm{MV}^{N,C}$ 和一个联盟 $T \in 2^{N\backslash C}$, 基于 C 的 T–边际博弈 $(v^C)^T : 2^{N\backslash T} \to \mathbb{R}$ 定义为, 对每个 $S \subseteq N\backslash T$

$$(v^C)^T(S) := v(S \bigcup T \bigcup C) - v(T \bigcup C).$$

我们有下述结论.

命题 5.45　令 $(N, v) \in \mathrm{MV}^{N,C}$, 则下列断言是等价的:

(a) (N, v) 是一个具有宗族 C 的完全宗族博弈;

(b) $(N\backslash C, v^C)$ 是一个凹博弈;

(c) 对每个 $T \subseteq N\backslash C$, $\left(N\backslash(C\bigcup T), (v^C)^T\right)$ 是一个次可加博弈;

(d) 对每个 $T \subseteq N\backslash C$, $\left(N\backslash(C\bigcup T), v^{C\cup T}\right)$ 是一个次可加博弈.

证明　注意, (a)⇔(b) 是由命题 5.44 得到的, (b)⇔(c) 是由注释 5.43 得到的, 最后, (c)⇔(d) 很容易从基于 C 的 T–边际博弈的定义得到.

5.4.2　对偶转换

现在介绍一个对宗族具有 0 值的完全宗族博弈和单调凸博弈之间的有用的关系, 并关注这两类博弈之间的转换工作. 结论是, 我们总可以由对宗族具有 0 值的完全宗族博弈来构造单调凸博弈, 以及由单调凸博弈来构造对宗族具有 0 值 (也就是说 $v(C) = 0$) 的完全宗族博弈. 我们称这样的对应转换过程分别为 "对偶化和限制" 与 "对偶化和扩展".

给定 $N = \{1, \cdots, n\}$, $C \in 2^N\backslash\{\varnothing, N\}$. 用 $\mathrm{CLAN}_0^{N,C}$ 表示所有 N 上满足对宗族 C 有 $v(C) = 0$ 的完全宗族博弈的集合. 在 $N\backslash C$ 上博弈的集合用 $G^{N\backslash C}$ 表示, 在 $N\backslash C$ 上的所有单调凸博弈的集合用 $\mathrm{MCONV}^{N\backslash C}$ 表示.

"对偶化和限制" 算子 $D^r : \mathrm{CLAN}_0^{N,C} \to G^{N\backslash C}$ 定义为

$$D^r(N, v) = (N\backslash C, w), \text{对每个} (N, v) \in \mathrm{CLAN}_0^{N,C},$$

其中, 对所有 $S \subseteq N\backslash C$, $w(S) := v^*(S)$ (参见定义 1.10).

命题 5.46　令 $(N, v) \in \mathrm{CLAN}_0^{N,C}$, 那么

$$D^r(N,v)\in \mathrm{MCONV}^{N\backslash C}.$$

证明 令 $(N\backslash C,w):=D^r(N,v)$, 为了证明 $(N\backslash C,w)$ 是凸的, 令 $i\in N\backslash C$, $S_1\subseteq S_2\subseteq(N\backslash C)\setminus\{i\}$, 那么

$$\begin{aligned}
w(S_2\bigcup\{i\})-w(S_2)&=v(N)-v(N\backslash(S_2\bigcup\{i\}))-v(N)+v(N\backslash S_2)\\
&=v(N\backslash S_2)-v(N\backslash(S_2\bigcup\{i\}))\\
&\geqslant v(N\backslash S_1)-v(N\backslash(S_1\bigcup\{i\}))\\
&=v(N)-v(N\backslash(S_1\bigcup\{i\}))-v(N)+v(N\backslash S_1)\\
&=w(S_1\bigcup\{i\})-w(S_1),
\end{aligned}$$

其中, 不等式来源于 (N,v) 的 C-凹性.

由 (N,v) 的单调性, 对 $S_1\subseteq S_2\subseteq(N\backslash C)$, 有

$$w(S_1)=v(N)-v(N\backslash S_1)\leqslant v(N)-v(N\backslash S_2)=w(S_2),$$

也就是说, 博弈 $(N\backslash C,w)$ 也是单调的.

"对偶化和扩展" 算子 $D^e:\mathrm{MCONV}^{N\backslash C}\to G^N$ 定义为

$$D^e(N\backslash C,w)=(N,v)\text{, 对每个}(N\backslash C,w)\in\mathrm{MCONV}^{N\backslash C},$$

其中, 对所有的 $S\subseteq N$,

$$v(S)=\begin{cases}0, & \text{如果 } C\not\subseteq S,\\ w(N\backslash C)-w((N\backslash C)\setminus(S\cap(N\backslash C))), & \text{否则}.\end{cases}$$

命题 5.47 令 $(N\backslash C,w)\in\mathrm{MCONV}^{N\backslash C}$, 那么

$$D^e(N\backslash C,w)\in\mathrm{CLAN}_0^{N,C}.$$

证明 注意到, 由 v 的定义, 在博弈 $(N,v):=D^e(N,w)$ 中, 每个参与者 $i\in C$ 是否决参与者. 为了证明 (N,v) 是单调的, 令 $S\subset N$, $i\in N\backslash S$.

如果 $C\not\subseteq S$, $i\notin C$ 或者 $i\in C$, 使得 $C\not\subseteq S\bigcup\{i\}$, 那么由 v 的定义, $v(S)=0=v(S\bigcup\{i\})$.

如果 $C\not\subseteq S$, 并且 $i\in C$, 满足 $C\subseteq S\bigcup\{i\}$, 那么

$$\begin{aligned}
v(S\bigcup\{i\})&=w(N\backslash C)-w((N\backslash C)\setminus((S\bigcup\{i\})\bigcap(N\backslash C)))\\
&=w(N\backslash C)-w((N\backslash C)\setminus(S\bigcap(N\backslash C)))=v(S),
\end{aligned}$$

如果 $C\subseteq S$, 那么

$$v(S\bigcup\{i\})=w(N\backslash C)-w((N\backslash C)\setminus((S\bigcup\{i\})\bigcap(N\backslash C)))$$

$$\geqslant w(N\backslash C) - w((N\backslash C)\backslash(S\bigcap(N\backslash C))) = v(S),$$

其中, 不等式来源于 $(N\backslash C, w)$ 的单调性.

剩下的就是要证明 (N,v) 是 C-凹的. 令 $S_1\subseteq S_2\subseteq N$ 以及 $i\in S_1\backslash C$, 那么

$$\begin{aligned}
&v(S_1) - v(S_1\backslash\{i\})\\
&= w((N\backslash C)\backslash((S_1\backslash\{i\})\bigcap(N\backslash C))) - w((N\backslash C)\backslash(S_1\bigcap(N\backslash C)))\\
&\geqslant w((N\backslash C)\backslash((S_2\backslash\{i\})\bigcap(N\backslash C))) - w((N\backslash C)\backslash(S_2\bigcap(N\backslash C)))\\
&= v(S_2) - v(S_2\backslash\{i\}),
\end{aligned}$$

其中, 不等式来源于 $(N\backslash C, w)$ 的凸性.

最后, 容易得出下面的结果.

命题 5.48　令 D^r 和 D^e 分别是如上介绍的 "对偶化和限制" 和 "对偶化和扩展" 算子, 那么

(a) $D^r\circ D^e$ 是 $\mathrm{CLAN}_0^{N,C}$ 上的恒等映射;

(b) $D^e\circ D^r$ 是 $\mathrm{MCONV}^{N,C}$ 上的恒等映射.

5.4.3　核心和 Weber 集

现在介绍如何使用 "对偶化和限制" 和 "对偶化和扩展" 算子来关联对应 (完全宗族和单调凸) 博弈的核心元素和 Weber 集元素 (参见定义 2.3 和定义 2.19).

为了陈述方便, 需一些符号. 令参与者集合 N 和 $C\in 2^N\backslash\{\varnothing, N\}$ 是给定的, 并且令 $\Pi(C)$ 和 $\Pi(N\backslash C)$ 分别表示 C 和 $N\backslash C$ 的所有排列. 对每个 $(\tau,\sigma)\in\Pi(C)\times\Pi(N\backslash C)$, 用 $m^{(\tau,\sigma)}(N,v)$ 表示 $(N,v)\in\mathrm{CLAN}_0^{N,C}$ 和 N 的排列 (τ,σ) 的边际贡献向量, (τ,σ) 是每个非宗族成员的所有前序集合都包含宗族的排列. 令

$$W'(N,v) := \mathrm{co}\left\{m^{(\tau,\sigma)}(N,v)\,|\,(\tau,\sigma)\in\Pi(C)\times\Pi(N\backslash C)\right\}.$$

最后, 令 $m^{(\tau,\sigma)}(N,v)_{|N\backslash C}$ 表示 $m^{(\tau,\sigma)}(N,v)$ 在 $N\backslash C$ 上的投影, 并且

$$W'(N,v)_{|N\backslash C} := \mathrm{co}\left\{m^{(\tau,\sigma)}(N,v)_{|N\backslash C}\,|\,(\tau,\sigma)\in\Pi(C)\times\Pi(N\backslash C)\right\}.$$

我们有下列结论.

命题 5.49　令 $(N,v)\in\mathrm{CLAN}_0^{N,C}$, 那么 $C(D^r(N,v)) = W'(N,v)_{|N\backslash C}$.

证明　令 $(N\backslash C, w) := D^r(N,v)$, 由命题 5.46, $(N\backslash C, w)\in\mathrm{MCONV}^{N\backslash C}$, 因此, $C(N\backslash C, w) = W(N\backslash C, w)$. 这样, 仅需证明 $W(N\backslash C, w) = W'(N,v)_{|N\backslash C}$. 对此, 我们证明对每个 $\sigma\in\Pi(N\backslash C)$ 和任何 $\tau\in\Pi(C)$, $m^{\sigma}(N\backslash C, w) = m^{(\tau,\overline{\sigma})}(N,v)_{|N\backslash C}$, 其中,

$$m^{\sigma}(N\backslash C, w)\in W(N\backslash C, w),$$

$$m^{(\tau,\overline{\sigma})}(N,v)_{|N\backslash C} \in W'(N,v)_{|N\backslash C},$$

并且, $\overline{\sigma}$ 是 σ 的逆序.

对每个 $i \in N\backslash C$, 有

$$\begin{aligned} m_i^{(\tau,\overline{\sigma})}(N,v)_{|N\backslash C} &= v\left(P^{(\tau,\overline{\sigma})}(i) \bigcup \{i\}\right) - v\left(P^{(\tau,\overline{\sigma})}(i)\right) \\ &= v\left(C \bigcup P^{\overline{\sigma}}(i) \bigcup \{i\}\right) - v\left(C \bigcup P^{\overline{\sigma}}(i)\right) \\ &= v\left(N\backslash P^{\sigma}(i)\right) - v\left(N\backslash \left(P^{\sigma}(i) \bigcup \{i\}\right)\right) \\ &= v(N) - v\left(N\backslash \left(P^{\sigma}(i) \bigcup \{i\}\right)\right) - v(N) + v\left(N\backslash P^{\sigma}(i)\right) \\ &= w\left(P^{\sigma}(i) \bigcup \{i\}\right) - w\left(P^{\sigma}(i)\right) \\ &= m_i^{\sigma}(N\backslash C, w), \end{aligned}$$

因此, 断言成立.

令 $m^{\sigma}(N\backslash C,w)$ 是关于 $(N\backslash C,w)$ 和 $\sigma \in \Pi(N\backslash C)$ 的边际贡献向量. 令 $x^{m^{\sigma}(N\backslash C,w)} \in \mathbb{R}^n$ 定义为

$$x_i^{m^{\sigma}(N\backslash C,w)} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } i \in C, \\ m_i^{\sigma}(N\backslash C,w), & \text{如果 } i \in N\backslash C. \end{cases}$$

并且令

$$X^{(N\backslash C,w)} = \mathrm{co}\left\{x^{m^{\sigma}(N\backslash C,w)} \middle| \sigma \in \Pi(N\backslash C)\right\}.$$

现在叙述最后一个结论.

命题 5.50　令 $(N\backslash C,w) \in \mathrm{MCONV}^{N\backslash C}$, 那么

$$W'\left(D^e(N\backslash C,w)\right) = X^{(N\backslash C,w)}.$$

证明　令 $(N,v) := D^e(N\backslash C,w)$, 由命题 5.47, 由于 $(N,v) \in \mathrm{CLAN}_0^{N,C}$, 故仅需证明对每个 $\sigma \in \Pi(N\backslash C)$ 和 $\tau \in \Pi(C)$, 有 $x^{m^{\sigma}(N\backslash C,w)} = m^{(\tau,\overline{\sigma})}(N,v)$, 其中, $\overline{\sigma}$ 是 σ 的逆序. 下面分两种情况证明:

(a) $i \in N\backslash C$, 由命题 5.49, 有

$$m_i^{(\tau,\overline{\sigma})}(N,v) = m_i^{(\tau,\overline{\sigma})}(N,v)_{|N\backslash C} = m_i^{\sigma}(N\backslash C,w) = x_i^{m^{\sigma}(N\backslash C,w)},$$

(b) $i \in C$, 有

$$m_i^{(\tau,\overline{\sigma})}(N,v) = v\left(P^{(\tau,\overline{\sigma})}(i) \bigcup \{i\}\right) - v\left(P^{(\tau,\overline{\sigma})}(i)\right) = 0 = x_i^{m^{\sigma}(N\backslash C,w)},$$

其中, 第二个不等式来源于 $(N,v) \in \mathrm{CLAN}_0^{N,C}$ 和 $P^{(\tau,\overline{\sigma})}(i) \bigcup \{i\} \subseteq C$.

因此, 命题成立.

第二部分　具有模糊联盟的合作博弈

具有模糊联盟的合作博弈是在文献 [4] 和 [5] 中引入的, 用来建模以下情况: 参与者有以不同参与水平合作的可能, 可以从不合作到完全合作, 并且获得的收益依赖于其合作水平. 模糊联盟描述的是合作水平, 在这个合作水平上每个参与者进行合作. 模糊联盟的使用, 尤其是在联合项目中较有优势, 在联合项目中, 合作参与者拥有一些 (可分割的) 私有资源, 例如, (可分割的) 商品、时间、金钱, 并且不得不决定在这个联合项目中的投资量. 另外一个使用模糊联盟的情况源于 "大经济" 问题: 在有限经济中, 模糊联盟变成一个与无限非原子经济相关的 crisp 联盟, 这个无限非原子经济是由将原有限经济中的每个参与者用与其相同的参与者的连续统替换而获得的. 一个参与者集合固定且具有模糊联盟的合作模糊博弈 (或简称模糊博弈) 是由它的特征函数来表示的. 模糊博弈的特征函数给出每个模糊联盟一个实数收益值. 由于在传统合作博弈中 (今后称为 crisp 博弈), 参与者与其他参与者或者完全包含在合作中, 或者完全不包含在合作中, 可以认为合作博弈的传统模型是合作模糊博弈模型的粗糙 (离散) 版本.

具有模糊联盟的博弈及其应用在博弈论文献中得到了越来越多关注. 基本的专题包括, 在文献 [31] 中关注的是基于三角模的度量和对角线 Aumann-Shapley 值的特殊扩展[7], 在文献 [14] 中强调的是非合作博弈. 模糊和多目标博弈是文献 [80] 的分析目标. 在模糊合作博弈理论和应用上的研究, 有以下专题的论文: 一些解概念、有关它们的公理化描述以及它们之间的关系, 读者可参考文献 [17], [18], [19], [73], [76], [95], [114], [119], [120], [121]; 模糊博弈的特殊类及其它们之间的相互关系, 读者可参考文献 [9], [17], [18], [19], [113], [114], [115], [119], [120], [121]; 模糊博弈在不同情况下的应用, 读者可参考文献 [50], [66]; 合作模糊博弈模型的新解释读者可参考文献 [10].

这一部分从模糊联盟和合作模糊博弈的定义开始, 研究合作模糊博弈理论, 不过多地涉及将具有 crisp 联盟的博弈推广到具有模糊联盟的博弈的方法, 一种可能是考虑在文献 [83] 引进的一个 crisp 博弈的多维线性扩展, 或考虑使用丘奎特 (Choquet) 积分的扩展[35]. 对这种扩展问题感兴趣的读者可以参考文献 [125] 和 [126].

这一部分是这样组织的. 第 6 章介绍具有模糊联盟的合作博弈理论的基本符号

和概念. 第 7 章介绍了大量的模糊博弈的集值解和单点解概念, 像 Aubin 核心、优势核心和稳定集、广义核心和稳定集, 以及不同的核心捕捉器和妥协值 (compromise value), 并进一步研究了这些解概念间的关系. 第 8 章研究合作模糊博弈的凸性, 并介绍了几个凸模糊博弈的特征, 研究了解概念的特殊性质. 对于这类模糊博弈, 我们也介绍和研究了参与单调分配机制 (participation monotonic allocation scheme) 的概念及其受限平等解. 第 9 章研究了模糊宗族博弈的核心, 以及这些博弈相关集值解概念; 并介绍了双单调参与分配机制 (bi-monotonic participation allocation scheme) 的新的解概念.

第6章 预备知识

令 N 是参与者的非空集合, 通常的形式是 $\{1,\cdots,n\}$. 从现在开始, 系统地将 2^N 的元素看做是 crisp 联盟, 将 G^N 中的合作博弈看做是 crisp 博弈.

定义 6.1 一个**模糊联盟**是一个向量 $s\in[0,1]^N$.

s 的第 i 个分量 s_i 是在模糊联盟 s 中参与者 i 的参与水平. 常用 $\mathcal{F}^N$ 来替代 $[0,1]^N$, 表示参与者集合 N 上的模糊联盟集合.

标准地, 一个 crisp 联盟 $S\in 2^N$ 对应于一个模糊联盟 e^S, 其中 $e^S\in\mathcal{F}^N$, 满足

$$(e^S)^i=\begin{cases}1, & \text{如果 } i\in S,\\ 0, & \text{如果 } i\in N\backslash S.\end{cases}$$

模糊联盟 e^S 对应的是这种情况: S 中的参与者完全合作 (也就是说, 具有参与水平 1), S 外的参与者完全不包含在里面 (也就是说, 它们有参与水平 0). 本书的这一部分常常将具有 $S\in 2^N$ 的模糊联盟 e^S 看做是类 crisp 联盟. 用 e^i 表示对应于 crisp 联盟 $S=\{i\}$ 的模糊联盟 (也是 $\mathbb{R}^n$ 中的第 i 个标准基向量). 模糊联盟 e^N 称为大联盟, 模糊联盟 (n 维向量) $e^{\varnothing}=(0,\cdots,0)$ 对应于空 crisp 联盟. 记非空模糊联盟集合为 $\mathcal{F}_0^N=\mathcal{F}^N\backslash\{e^{\varnothing}\}$. 注意, 若将模糊联盟看成为超立方体 $[0,1]^N$ 中的点, 则 crisp 联盟对应着这个超立方体的 $2^{|N|}$ 个极点. 对于 $N=\{1,2\}$, 我们有具有极点 $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ 的正方形. 对于 $N=\{1,2,3\}$, 对应的几何图像就是立方体.

对于 $s\in\mathcal{F}^N$, 定义 s 的载体为 $\mathrm{car}(s)=\{i\in N|s_i>0\}$. 如果 $\mathrm{car}(s)\neq N$, 则称 s 为真模糊联盟 (proper fuzzy coalition). 参与者集合 N 上的真模糊联盟的集合记为 $\mathcal{PF}^N$, 参与者集合 N 上的非空真模糊联盟的集合记为 $\mathcal{PF}_0^N$.

对于 $s,t\in\mathcal{F}^N$, 用 $s\leqslant t$ 表示对每个 $i\in N$, $s_i\leqslant t_i$. 定义 $s\wedge t=(\min(s_1,t_1),\cdots,\min(s_n,t_n))$, 以及 $s\vee t=(\max(s_1,t_1),\cdots,\max(s_n,t_n))$. 对于模糊联盟, 算子 $\vee$ 和 $\wedge$ 与 crisp 联盟的并和交有类似作用.

对于 $s\in\mathcal{F}^N$, $t\in[0,1]$, 令 $(s^{-i}\|t)$ 表示 $\mathcal{F}^N$ 中的元素, 其中对每个 $j\in N\backslash\{i\}$, $(s^{-i}\|t)_j=s_j$ 和 $(s^{-i}\|t)_i=t$.

对于每个 $s\in\mathcal{F}^N$, 引入 s 的模糊度 $\varphi(s)$, 定义为 $\varphi(s)=|\{i\in N|s_i\in(0,1)\}|$. 注意, $\varphi(s)=0$ 蕴含着 s 对应于一个 crisp 联盟, 以及在一个联盟 s 中, 如果 $\varphi(s)=n$, 那么参与水平不为 0 和 1.

定义 6.2 参与者集合为 N 的**合作模糊博弈**是一个映射 $v:\mathcal{F}^N\to\mathbb{R}$, 满足 $v(e^{\varnothing})=0$.

映射 v 赋予每个模糊联盟一个实数值, 表示这个联盟可以获得的值.

参与者集合为 N 的模糊博弈的集合记作 FG^N. 注意, FG^N 是一个无限维线性空间.

例 6.3 令 $v\in\mathrm{FG}^{\{1,2,3\}}$, 满足: 对每个 $s=(s_1,s_2,s_3)\in\mathcal{F}^{\{1,2,3\}}$, 有

$$v(s_1,s_2,s_3)=\min\{s_1+s_2,s_3\}.$$

考虑这样一种情况, 参与者 1, 2, 3 分别拥有无限可分的一个单位货物 A, A, B. 其中 A 和 B 是互补货物, 并且以 α 为比例组合单位货物 A 和 B 可以获得收益 α.

例 6.4 令 $v\in\mathrm{FG}^{\{1,2\}}$ 定义为, 对每个 $s=(s_1,s_2)\in\mathcal{F}^{\{1,2\}}$, 有

$$v(s_1,s_2)=\begin{cases}1, & \text{如果 } s_1\geqslant\dfrac{1}{2}, s_2\geqslant\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

这个博弈对应于这样一种情况, 只有联盟参与者的参与水平都至少是 $\frac{1}{2}$ 的时候才能赢, 所有其他联盟都不能赢.

例 6.5(公共货物博弈) 假定 n 个代理人想制造一个设备来联合使用, 设备的花费依赖于代理人的参与水平的总和, 用 $k\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\right)$ 表示, 其中 k 是一个 $[0,n]$ 上的连续单增函数, 满足 $k(0)=0$, 并且 $s_1,\cdots,s_n\in[0,1]$ 是代理人的参与水平. 具有参与水平 s_i 的代理人 i 的收益用 $g_i(s_i)$ 表示, 其中函数 $g_i:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是满足 $g_i(0)=0$ 的连续单增函数. 由此得出一个模糊博弈 $v\in\mathrm{FG}^N$, 其中, 对每个 $s\in\mathcal{F}^N$, $v(s)=\sum_{i=1}^{n}g_i(s_i)-k\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\right)$.

对于每个 $s\in\mathcal{F}^N$, 令 $\lceil s\rfloor:=\sum_{i=1}^{n}s_i$ 表示 N 中参与者关于 s 的合计参与水平. 给定 $v\in\mathrm{FG}^N$ 以及 $s\in\mathcal{F}_0^n$, 用 $\alpha(s,v)$ 表示 s 关于 $\lceil s\rfloor$ 的平均收益, 即

$$\alpha(s,v):=\frac{v(s)}{\lceil s\rfloor}. \tag{6.1}$$

注意, $\alpha(s,v)$ 可以解释为联盟 s 的单位参与水平值 (per participation-level-unit value).

众所周知, 在合作 crisp 博弈理论中, 子博弈是很重要的概念. 下面, crisp 博弈的子博弈将要被模糊博弈的限制博弈替代.

对于 $s,t\in[0,1]^N$, 令 $s*t$ 表示 s 和 t 的按分量相乘的积, 即对所有的 $i\in N$, $(s*t)_i=s_it_i$.

定义 6.6　设 $v \in \mathrm{FG}^N$, $t \in \mathcal{F}_0^N$. v 的 ***t*-限制博弈**是定义为博弈 $v_t : \mathcal{F}_0^N \to \mathbb{R}$, 满足对所有 $s \in \mathcal{F}_0^N$, $v_t(s) = v(t * s)$.

在 t-限制博弈中, $t \in \mathcal{F}_0^N$ 代表大联盟, 这说的是在这样的意义下: t-限制博弈仅仅考虑 $\mathcal{F}_0^N$ 的子集 $\mathcal{F}_t^N$, $\mathcal{F}_t^N$ 包含对应参与者的参与水平至多是 t 的模糊联盟, $\mathcal{F}_t^N = \left\{s \in \mathcal{F}_0^N | s \leqslant t\right\}$.

注释 6.7　当 $t = e^T$ 时, 对每个 $s \in \mathcal{F}^N$, 有 $v_t(s) = v\left(e^T * s\right) = v\left(\sum\limits_{i \in T} s_i e^i\right)$; 当 $s = e^S$, 有 $v_t\left(e^S\right) = v\left(e^{S \cap T}\right)$.

我们要对模糊无异议博弈给予特别的关注. 在合作 crisp 博弈理论中, 无异议博弈也是一个重要概念, 不仅因为它们形成了线性空间 G^N 的自然基, 而且由于借助于无异议博弈的帮助, 很多有趣的博弈类可以被很好的描述.

对于 $t \in \mathcal{F}_0^N$, 用 u_t 来表示定义为如下的模糊博弈

$$u_t(s) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } s \geqslant t, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{6.2}$$

称这样的博弈为基于 t 的无异议博弈: 模糊联盟 s 是获胜的, 如果 s 的参与水平微弱超过 (exceed weakly) t 对应的参与水平; 否则联盟是输的, 即它有值 0.

注释 6.8　例 6.4 中的博弈是一个具有 $t = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 的无异议博弈.

当然, 合作模糊博弈理论的发展来源于合作 crisp 博弈理论. 下一章将使用从 FG^N 到 G^N 的算子和从 G^N 到 FG^N 的算子[83,125,126]. 特别地, 将考虑多线性算子 $\mathrm{ml} : G^N \to \mathrm{FG}^N$[83] (参见 (3.9) 式) 和 crisp 算子 $\mathrm{cr} : \mathrm{FG}^N \to G^N$. 这里, 对于一个 crisp 博弈 $v \in G^N$, 多维线性扩展 $\mathrm{ml}(v) \in \mathrm{FG}^N$ 定义为, 对每个 $s \in \mathcal{F}^N$

$$\mathrm{ml}(v)(s) = \sum_{S \in 2^N \setminus \{\varnothing\}} \left(\prod_{i \in S} s_i \prod_{i \in N \setminus S} (1 - s_i)\right) v(S).$$

对于一个模糊博弈 $v \in \mathrm{FG}^N$, 对应的 crisp 博弈 $\mathrm{cr}(v) \in G^N$ 定义为, 对每个 $S \in 2^N$,

$$\mathrm{cr}(v)(S) = v\left(e^S\right).$$

注释 6.9　鉴于注释 6.7, $\mathrm{cr}\left(v_{e^T}\right) : 2^N \to \mathbb{R}$ 到 2^N 的限制是 $\mathrm{cr}(v)$ 在参与者集合 T 上的子博弈.

例 6.10　对于 crisp 无异议博弈 u_T, 多线性扩展由 $\mathrm{ml}(u_T)(s) = \prod\limits_{i \in T} s_i$ 定义[125,126], 以及 $\mathrm{cr}(\mathrm{ml}(u_T)) = u_T$. 对于博弈 $v, w \in \mathrm{FG}^{\{1,2\}}$, 其中对每个 $s \in \mathcal{F}^{\{1,2\}}$, $v(s_1, s_2) = s_1 (s_2)^2$, $w(s_1, s_2) = s_1 \sqrt{s_2}$, 有 $\mathrm{cr}(v) = \mathrm{cr}(w)$.

一般来讲, 合成 $\mathrm{cr}\circ\mathrm{ml}: G^N \to G^N$ 是 G^N 上的恒等映射. 但当 $|N| \geqslant 2$ 时, $\mathrm{ml}\circ\mathrm{cr}: \mathrm{FG}^N \to \mathrm{FG}^N$ 不是 FG^N 上的恒等映射.

例 6.11 令 $N = \{1,2\}$, $v \in \mathrm{FG}^{\{1,2\}}$, 其中对每个 $s = (s_1, s_2) \in \mathcal{F}^{\{1,2\}}$, $v(s_1, s_2) = 5\min\{s_1, 2s_2\}$, 那么对 crisp 博弈 $\mathrm{cr}(v)$, 有 $\mathrm{cr}(v)(\{1\}) = \mathrm{cr}(v)(\{2\}) = 0$, $\mathrm{cr}(v)(\{1,2\}) = 5$. 对于多线性扩展 $\mathrm{ml}(\mathrm{cr}(v))$, 有 $\mathrm{ml}(\mathrm{cr}(v)(s)) = 5s_1s_2$. 注意到 $\mathrm{ml}\left(\mathrm{cr}(v)\left(1, \frac{1}{2}\right)\right) = 2\frac{1}{2}$, 但 $v\left(1, \frac{1}{2}\right) = 5$ 蕴含 $v \neq \mathrm{ml}(\mathrm{cr}(v))$.

注释 6.12 注意到对一个无异议博弈 u_t, 对应的 crisp 博弈 $\mathrm{cr}(u_t)$ 等于 u_T, 其中 u_T 是基于 $T = \mathrm{car}(t)$ 的 crisp 无异议博弈. 反过来, 不存在 $T \in 2^N\backslash\{\varnothing\}$ 使 $\mathrm{ml}(u_T)$ 是模糊无异议博弈, 因为 $\mathrm{ml}(u_T)$ 对其值来讲是连续的: 对每个 $s \in \mathcal{F}^N$, $\mathrm{ml}(u_T)(s) = \prod_{i\in T} s_i$.

第 7 章　模糊博弈的解概念

这一章介绍一些模糊博弈的解概念, 并研究它们的性质和相互之间的关系. 7.1 节至 7.3 节研究各种核心概念和稳定集. 7.1 节介绍的 Aubin 核心在这一章的其他部分都起着重要作用. 7.4 节介绍模糊博弈的 Shapley 值和 Weber 集, 这些都是基于 crisp 合作的, 并且对在 7.5 节中介绍的路解 (path solution) 和路解覆盖 (path solution cover) 都有启发作用. 7.6 节介绍和研究模糊博弈的妥协值.

7.1　转归和 Aubin 核心

定义 7.1　博弈 $v \in \mathrm{FG}^N$ 的**转归集** $I(v)$ 是集合

$$I(v)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\left|\sum_{i\in N}x_i=v\left(e^N\right),\ \text{对每个}\ i\in N, x_i\geqslant v\left(e^i\right)\right.\right\}.$$

定义 7.2　模糊博弈 $v \in \mathrm{FG}^N$ 的 **Aubin 核心**[4–6] 是集合

$$C(v)=\left\{x\in I(v)\left|\ \text{对每个}\ s\in\mathcal{F}^N,\sum_{i\in N}s_ix_i\geqslant v(s)\right.\right\}.$$

因此, $x \in C(v)$ 可以看做是大联盟 e^N 的值的分配, 其中对每个模糊联盟 s, 总报酬不小于 $v(s)$; 这样, $C(v)$ 是转归的子集, 这些转归对模糊联盟的可能偏差来说是稳定的. 注意, 当参与者 $i \in N$ 部分合作的时候, 他获得的收益与其参与水平成比例. 也就是说, 如果参与者 i 完全合作的时候获得 x_i, 那么当他以参与水平 s_i 合作时将获得收益 s_ix_i.

注意, $v \in \mathrm{FG}^N$ 的 Aubin 核心 $C(v)$ 也可以这样定义:

$$C(v)=\left\{x\in I(v)\left|\ \text{对每个}\ s\in\mathcal{F}_0^N,\sum_{i\in N}s_ix_i\geqslant v(s)\right.\right\},$$

并且这个更贴近 crisp 博弈核心的定义 (参见定义 2.3).

注释 7.3　对应于 v 的 crisp 博弈的核心 $C(\mathrm{cr}(v))$ 包含 $C(v)$: $C(v) \subset C(\mathrm{cr}(v))$. 在下一章我们将看到, 在凸模糊博弈的情况下, 这两个核心是一样的.

显然, 对每个 $v \in \mathrm{FG}^N$, 模糊博弈 v 的 Aubin 核心是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的闭凸集. 当然, 正如在例 7.4 中看到的那样, Aubin 核心可能是空集, 或者如在例 7.5 中看到的那样, 可以仅含有一个元素.

例 7.4 再一次考虑例 6.4 中的博弈 v. 核心 $C(v)$ 是空的, 因为对于一个核心元素 x, 它应该满足 $x_1+x_2=v\left(e^{\{1,2\}}\right)=1$, 并且 $\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\geqslant v\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$, 这是不可能的.

例 7.5 对于例 6.3 中的博弈, 货物 B 在大联盟中是稀少的, 它反映出这样一个事实, 即核心只包含一个点 $(0,0,1)$, 它对应于这样一种情况, 所有收益将赋予参与者 3, 因为他拥有稀缺货物.

下一个命题显示, 对于一个无异议博弈 u_t (参见 (6.2) 式), 在 t 中参与水平为 1 的参与者对 1 的任意分割都会生成一个核心元素[17].

命题 7.6 令 $u_t\in \mathrm{FG}^N$ 是基于模糊联盟 $t\in\mathcal{F}_0^N$ 的无异议博弈, 那么 Aubin 核心 $C(u_t)$ 非空当且仅当对某些 $k\in N$ 有 $t_k=1$. 事实上,

$$C(u_t)=\mathrm{co}\left\{e^k|k\in N,t_k=1\right\}.$$

证明 如果某些 $k\in N$ 有 $t_k=1$, 那么 $e^k\in C(u_t)$, 因此, $\mathrm{co}\left\{e^k|k\in N,t_k=1\right\}\subset C(u_t)$.

反过来, $x\in C(u_t)$ 蕴含 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1=u_t\left(e^N\right)$, $\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\geqslant 1=u_t(t)$, 并且对每个 $i\in N$, 有 $x_i\geqslant u_t\left(e^i\right)\geqslant 0$. 因此, $x\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n}x_i(1-t_i)\leqslant 0$, 这蕴含着对所有 $i\in N$ 有 $x_i(1-t_i)=0$. 因此, $\{x_i|x_i>0\}\subset\{i\in N|t_i=1\}$. 故得 $x\in\mathrm{co}\left\{e^k|k\in N,t_k=1\right\}$, 即 $C(u_t)\subset\mathrm{co}\left\{e^k|k\in N,t_k=1\right\}$.

下面, 用 FG_*^N 来表示具有非空 (Aubin) 核心的模糊博弈的集合.

7.2 核心和稳定集

现在, 引进模糊博弈 $v\in\mathrm{FG}^N$ 的另外两个核心, 称为 proper 核心和 crisp 核心, 它们是对 Aubin 核心定义[114] 中的稳定性条件的弱化.

定义 7.7 $v\in\mathrm{FG}^N$ **的 proper 核心** $C^P(v)$ 是集合

$$C^P(v)=\left\{x\in I(v)\left|\ \text{对每个 } s\in\mathcal{PF}^N,\sum_{i\in N}s_ix_i\geqslant v(s)\right.\right\}.$$

注意, 在 $C^P(v)$ 的定义中, 仅仅考虑了真模糊联盟的稳定性 (参见第 6 章). 集合 $C^P(v)$ 也可以定义为

$$C^P(v)=\left\{x\in I(v)\left|\ \text{对每个 } s\in\mathcal{PF}_0^N,\sum_{i\in N}s_ix_i\geqslant v(s)\right.\right\}.$$

进一步, 在稳定性条件中, 可以仅仅考虑类 crisp 联盟 e^S.

定义 7.8　$v \in \mathrm{FG}^N$ 的 **crisp 核心** $C^{\mathrm{cr}}(v)$ 是集合

$$C^{\mathrm{cr}}(v) = \left\{ x \in I(v) \,\middle|\, \text{对每个 } S \in 2^N, \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(e^S) \right\}.$$

显然, 一个模糊博弈 v 的 crisp 核心 $C^{\mathrm{cr}}(v)$ 也可以定义为

$$C^{\mathrm{cr}}(v) = \left\{ x \in I(v) \,\middle|\, \text{对每个 } S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}, \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(e^S) \right\},$$

它也是 crisp 博弈 $\mathrm{cr}(v)$ 的核心. 易知, 两个核心 $C^P(v)$ 和 $C^{\mathrm{cr}}(v)$ 都是凸集.

令 $v \in \mathrm{FG}^N$, $x, y \in I(v)$, $s \in \mathcal{F}_0^N$, 称 x 通过 s 占优 y, 记作 $x \,\mathrm{dom}_s\, y$, 如果

(i) 对所有 $i \in \mathrm{car}(s)$ 都有 $x_i > y_i$,

(ii) $\sum_{i \in N} s_i x_i \leqslant v(s)$.

这两个条件可以如下解释:

• 对每个 $i \in \mathrm{car}(s)$, $x_i > y_i$ 蕴含 $s_i x_i > s_i y_i$, 它意味着对每个 (活跃的) 参与者 $i \in \mathrm{car}(s)$, 转归 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 比转归 $y = (y_1, \cdots, y_n)$ 好;

• $\sum_{i \in N} s_i x_i \leqslant v(s)$ 意味着支付 $\sum_{i \in N} s_i x_i$ 可以由模糊联盟 s 达到.

注释 7.9　注意 $x \,\mathrm{dom}_s\, y$ 蕴含 $s \in \mathcal{PF}_0^N$, 因为由对所有的 $i \in N$ 有 $x_i > y_i$ 可以推出 $\sum_{i \in N} x_i > \sum_{i \in N} y_i$, 与 $x, y \in I(v)$ 矛盾. 但是需要注意 $|\mathrm{car}(s)| = 1$ 是可能的.

如果存在一个非空 (真) 模糊联盟 s 使得 $x \,\mathrm{dom}_s\, y$, 则就简单地说 x 占优 y, 记作 $x \,\mathrm{dom}\, y$, $x \,\mathrm{dom}\, y$ 的否定记作 $\neg x \,\mathrm{dom}\, y$.

定义 7.10　模糊博弈 $v \in \mathrm{FG}^N$ 的**优势核心** (dominance core) $\mathrm{DC}(v)$ 是一个不被其他转归占优的转归的集合:

$$\mathrm{DC}(v) = \left\{ x \in I(v) \,|\, \text{对所有的 } y \in I(v), \neg y \,\mathrm{dom}\, x \right\}.$$

定义 7.11　模糊博弈 $v \in \mathrm{FG}^N$ 的**稳定集**是一个满足下列性质的转归的非空集合 K:

(i) (内部稳定性) 对所有 $x, y \in K$, $\neg x \,\mathrm{dom}\, y$;

(ii) (外部稳定性) 对所有 $z \in I(v) \backslash K$, 存在一个转归 $x \in K$ 使得 $x \,\mathrm{dom}\, z$.

定理 7.12　令 $v \in \mathrm{FG}^N$, 则

(i) $C(v) \subset C^P(v) \subset C^{\mathrm{cr}}(v)$;

(ii) $C^P(v) \subset \mathrm{DC}(v)$;

(iii) 对每个稳定集 K 都成立 $\mathrm{DC}(v) \subset K$.

证明　如果 $I(v)=\varnothing$, 那么定理是显然成立的. 因此, 下面假定 $I(v)\neq\varnothing$.

(i) 这个结论直接由定义可以得到.

(ii) 令 $x\in I(v)\backslash \mathrm{DC}(v)$, 那么存在 $y\in I(v)$, $s\in \mathcal{PF}_0^N$, 满足对每个 $i\in \operatorname{car}(s)$ 有 $y_i>x_i$, 以及 $\sum\limits_{i\in N} s_i y_i\leqslant v(s)$. 因此, $\sum\limits_{i\in \operatorname{car}(s)} s_i x_i<\sum\limits_{i\in \operatorname{car}(s)} s_i y_i\leqslant v(s)$, 所以, $x\in I(v)\backslash C^P(v)$, 得到结论 $C^P(v)\subset \mathrm{DC}(v)$.

(iii) 令 K 是稳定集, 由于 $\mathrm{DC}(v)$ 是由那些不被占优的转归组成, 并且由外部稳定性, 每个在 $I(v)\backslash K$ 中的转归都会被一些转归占优, 因此 $\mathrm{DC}(v)\subset K$.

下面的定理给出模糊博弈 proper 核心和优势核心相等的充分条件.

定理 7.13　令 $v\in\mathrm{FG}^N$, 假定对每个 $s\in\mathcal{F}_0^N$, 有 $v(e^N)-\sum\limits_{i\in N\backslash \operatorname{car}(s)} v(e^i)-\dfrac{v(s)}{s^*}\geqslant 0$, 其中 $s^*=\min\limits_{i\in \operatorname{car}(s)} s_i$, 那么 $C^P(v)=\mathrm{DC}(v)$.

证明　注意到如果 $I(v)=\varnothing$, 则 $C^P(v)=\mathrm{DC}(v)=\varnothing$. 假定 $I(v)\neq\varnothing$. 由定理 7.12 得到 $C^P(v)\subset\mathrm{DC}(v)$. 下面通过证明 $x\notin C^P(v)$ 蕴含 $x\notin \mathrm{DC}(v)$ 来证明它的逆包含关系. 令 $x\in I(v)\backslash C^P(v)$, 则存在 $s\in\mathcal{PF}_0^N$ 使得 $\sum\limits_{i\in N} s_i x_i<v(s)$. 对每个 $i\in\operatorname{car}(s)$, 取 $\varepsilon_i>0$ 满足 $\sum\limits_{i\in \operatorname{car}(s)} s_i(x_i+\varepsilon_i)=v(s)$. 由于

$$\sum_{i\in \operatorname{car}(s)}(x_i+\varepsilon_i)\leqslant\sum_{i\in \operatorname{car}(s)}\frac{s_i(x_i+\varepsilon_i)}{s^*}=\frac{v(s)}{s^*},$$

故可以对每个 $i\notin\operatorname{car}(s)$, 取 $\delta_i\geqslant 0$ 满足 $\sum\limits_{i\notin \operatorname{car}(s)}\delta_i=\dfrac{v(s)}{s^*}-\sum\limits_{i\in \operatorname{car}(s)}(x_i+\varepsilon_i)$. 定义 $y\in\mathbb{R}^n$,

$$y_i=\begin{cases} x_i+\varepsilon_i, & \text{如果 } i\in\operatorname{car}(s),\\ v(e^i)+\dfrac{v(e^N)-\sum\limits_{i\in N\backslash \operatorname{car}(s)} v(e^i)-\dfrac{v(s)}{s^*}}{|N\backslash \operatorname{car}(s)|}+\delta_i, & \text{如果 } i\notin\operatorname{car}(s). \end{cases}$$

注意到 $\sum\limits_{i\in N} y_i=v(e^N)$, 对每个 $i\in\operatorname{car}(s)$, $y_i>x_i>v(e^i)$, 并且由于 $v(e^N)-\sum\limits_{i\in N\backslash \operatorname{car}(s)} v(e^i)-\dfrac{v(s)}{s^*}\geqslant 0$, 有对每个 $i\in N\backslash\operatorname{car}(s)$, $y_i\geqslant v(e^i)$. 因此, $y\in I(v)$. 现在, 由于对每个 $i\in\operatorname{car}(s)$, $y_i>x_i$, 以及 $\sum\limits_{i\in N} s_i y_i=v(s)$, 我们有 $y\,\mathrm{dom}_s\,x$; 这样便得 $x\in I(v)\backslash\mathrm{DC}(v)$.

注释 7.14　令 $v\in\mathrm{FG}^N$, 取 crisp 博弈 $w=\operatorname{cr}(v)$, 那么对每个 $s\in\mathcal{F}_0^N$,

$v(e^N) \geqslant \frac{v(s)}{s^*} + \sum_{i \in N \backslash \text{car}(s)} v(e^i)$ 蕴含对每个 $S \subseteq N$, $w(N) \geqslant w(S) + \sum_{i \in N \backslash S} w(i)$. 因此定理 7.13 可以看成是合作 crisp 博弈对应性质的推广 (参见定理 2.13 (i)).

现在, 给出两个说明以上定理的例子.

例 7.15　令 $N = \{1,2\}$, $v : \mathcal{F}^{\{1,2\}} \to \mathbb{R}$ 满足: 对每个 $s \in \mathcal{F}_0^{\{1,2\}}$, $v(s_1, s_2) = s_1 + s_2 - 1$, 以及 $v(e^{\varnothing}) = 0$. 进一步, 令

$$v_1(s) = \begin{cases} v(s), & \text{如果 } s \neq \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ 4, & \text{如果 } s = \left(0, \frac{1}{2}\right), \end{cases} \qquad v_2(s) = \begin{cases} v(s), & \text{如果 } s \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ 4, & \text{如果 } s = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

令 $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 = 1\}$, 那么

(i) $C(v) = C^P(v) = \text{DC}(v) = I(v) = \Delta$,

(ii) $C(v_1) = C^P(v_1) = \varnothing$, $\text{DC}(v_1) = I(v_1) = \Delta$,

(iii) $C(v_2) = \varnothing$, $C^P(v_2) = \text{DC}(v_2) = I(v_2) = \Delta$,

(iv) 对 v, v_1 和 v_2, 转归集合 Δ 是唯一的稳定集.

注意, 对于 $s = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 和 $C^P(v_2) = \text{DC}(v_2)$, 有 $2v_2(s) + \sum_{i \in N \backslash \text{car}(s)} v_2(e^i) > v_2(e^N)$, 因此对于等式 $C^P(v) = \text{DC}(v)$, 定理 7.13 的充分条件不是必要条件.

下个例子给出一个满足 $C(v) \neq \text{DC}(v)$ 以及 $C(v) \neq \varnothing$ 的模糊博弈 v. 注意, 对于 crisp 博弈 w, 如果 $C(w) \neq \text{DC}(w)$ 那么 $C(w) \neq \varnothing$ (参见定理 2.13 (ii)).

例 7.16　令 $N = \{1,2\}$, $v : \mathcal{F}^{\{1,2\}} \to \mathbb{R}$ 满足: 对所有的 $(s_1, 1) \in \mathcal{F}_0^{\{1,2\}}$, $v(s_1, 1) = \sqrt{s_1}$, 其余 $v(s_1, s_2) = 0$. 那么有 $I(v) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 | x_1 + x_2 = 1\}$, $C(v) = \left\{x \in I(v) \middle| 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}\right\} \neq I(v)$, $C^P(v) = DC(v) = I(v)$, 进一步, $I(v)$ 是唯一的稳定集.

通过博弈 $v \in \text{FG}^N$ 中的联盟 $s \in \mathcal{F}_0^N$ 的平均收益 (参见 (6.1) 式), 下面定义模糊博弈的另外一个核心概念.

定义 7.17　博弈 $v \in \text{FG}^N$ 的**等分核心** $\text{EDC}(v)$ 是集合

$$\text{EDC}(v) = \{x \in I(v) \mid \nexists\ s \in \mathcal{F}_0^N, \text{使得对所有 } i \in \text{car}(s), \alpha(s, v) > x_i\}.$$

因此, $x \in \text{EDC}(v)$ 可以看成是大联盟 e^N 的值的分配, 其中, 对每个模糊联盟 s, 存在一个具有正参与水平的参与者 i, 他的收益 x_i 至少与 s 的 $v(s)$ 的等分共享 $\alpha(s,v)$ 一样多.

命题 7.18　令 $v \in \text{FG}^N$, 则

(i) $\mathrm{EDC}(v) \subset \mathrm{EDC}(\mathrm{cr}(v))$;

(ii) $C(v) \subset \mathrm{EDC}(\mathrm{cr}(v))$.

证明 (i) 假定 $x \in \mathrm{EDC}(v)$, 那么由 $\mathrm{EDC}(v)$ 的定义, 不存在 $e^S \in \mathcal{F}_0^N$, 使得对所有的 $i \in \mathrm{car}(e^S)$, 有 $\alpha(e^S, v) > x_i$. 考虑到对所有 $S \in 2^N$, 有 $\mathrm{cr}(v)(S) = v(e^S)$, 不存在 $S \neq \varnothing$ 使得对所有的 $i \in S$, 有 $\dfrac{\mathrm{cr}(v)(S)}{|S|} > x_i$, 因此 $x \in \mathrm{EDC}(\mathrm{cr}(v))$.

(ii) 假定 $x \notin \mathrm{EDC}(v)$, 那么存在 $s \in \mathcal{F}_0^N$, 使得对所有的 $i \in \mathrm{car}(s)$, 有 $\alpha(s, v) > x_i$. 则

$$\sum_{i=1}^{n} s_i x_i < \sum_{i=1}^{n} \alpha(s, v) s_i = v(s)$$

蕴含 $x \notin C(v)$, 因此 $C(v) \subset \mathrm{EDC}(v)$.

下个例子表明, $\mathrm{EDC}(v)$ 和 $\mathrm{EDC}(\mathrm{cr}(v))$ 不一定是相等的.

例 7.19 令 $N = \{1, 2, 3\}$, 对每个 $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathcal{F}^{\{1,2,3\}}$, $v(s_1, s_2, s_3) = \sqrt{s_1 + s_2 + s_3}$. 对于这个博弈有

$$\mathrm{EDC}(\mathrm{cr}(v)) = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\} \quad \text{和} \quad \mathrm{EDC}(v) = \varnothing.$$

7.3 广义核心和稳定集

正如文献 [76] 研究的那样, 模糊博弈的核心元素 (à la Aubin) 可以与模糊博弈的可加的可分支撑函数对应. 这些作者引入了广义核心的概念, 它的元素包含有该博弈的更一般的可分支撑函数, 并且研究了它们的性质和与稳定集之间的关系.

前几节推广了关于核心和稳定集上的主要结果, 这些推广是基于模糊博弈的可分支撑函数的某些类, 这些类满足单调性, 也就是说, 对任意 $s, s' \in \mathcal{F}^N$, 如果对所有 $i \in N$ 有 $s_i \leqslant s'_i$, 则 $v(s) \leqslant v(s')$ 成立. 由于 $v(e^{\varnothing}) = 0$, v 的单调性蕴含对任意 $s \in \mathcal{F}^N$, 有 $v(s) \geqslant 0$. 本节总是假定 v 是单调的.

从几何观点考察 Aubin 核心, 首先注意到对每个 $x \in \mathbb{R}^n$, 可以以规范方式对应一个线性函数 $x^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 赋予一个实数值 $x^*(s) = \sum\limits_{i \in N} s_i x_i$. 对于模糊博弈 $v \in \mathrm{FG}^N$, 有 $x \in C(v)$ 当且仅当 $x^*(e^N) = v(e^N)$, 并且对每个 $s \in \mathcal{F}^N$ 有 $x^*(s) \geqslant v(s)$. 用几何术语解释就是: $x \in C(v)$ 当且仅当 $\mathrm{graph}(x^*) = \{(s, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\ \alpha = x^*(s)\}$, 它位于 $\mathrm{graph}(v) = \{(s, \alpha) \in \mathcal{F}^n \times \mathbb{R} | \alpha = v(s)\}$"之上", 并且两个图在点 $(e^{\varnothing}, v(e^{\varnothing}))$ 和 $(e^N, v(e^N)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 处相互接触. 由于 x^* 是一个线性函数, $\mathrm{graph}(x^*)$ 是 $\mathrm{graph}(v)$ 在 $x \neq 0$ 的情况下在点 $(e^N, v(e^N))$ 处

的支撑超平面. 进一步注意到上面给出的 $x^*:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是对 $s\in\mathcal{F}^N$ 的可分形式 $\sum_{i=1}^{n}p(s_i)x_i$ 的特殊类, 其中 $p:[0,1]\to[0,1]$ 满足 $p(0)=0$, $p(1)=1$, 以及对每个 $i\in N$, $p(s_i)=s_i\in[0,1]$.

接下来, 仍考虑满足 $p(0)=0$, $p(1)=1$ 的非线性函数 $p:[0,1]\to[0,1]$. 函数 p 称为是单调的, 如果对任何 $a,b\in[0,1]$ 满足若 $a\leqslant b$, 则 $p(a)\leqslant p(b)$ 成立. 令 $\boldsymbol{P}=\{p:[0,1]\to[0,1]|p$ 是单调的, 且 $p(0)=0,p(1)=1\}$. 则函数 p 是局部合作下的支付机制. 即如果参与者 $i\in N$ 在完全合作时赢得 x_i, 则其在以参与水平为 s_i 参与合作时的获得为 $p(s_i)x_i$.

定义 7.20　给定一个支付策略 $p\in\boldsymbol{P}$, 模糊博弈 v 的基于 p 的核心, 称为 **p-核心**, 定义为

$$C_p(v)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|\sum_{i\in N}x_i=v\left(e^N\right),\ \text{对每个}\ s\in\mathcal{F}^N,\sum_{i\in N}p(s_i)x_i\geqslant v(s)\right\}.$$

Aubin 核心是 p-核心的特殊情况, 其中对每个 $i\in N$, $p(s_i)=s_i$. Aubin 核心仅假定了一种参与者参与水平的支付策略, 而 p-核心对部分参与允许更宽泛的支付策略.

下面的例子会对理解 p-核心有帮助. 假定一个工人在完全参与的情况下, 他工作 30 天总收益为 3000 美元. 按照这个工人的参与水平, Aubin 核心假定 3000 美元的一部分按比例来支付. 比如每天工资为 100 美元. 但是, 在经济学中其他的支付策略也是常用的. 例如, 3000 美元可以在一开始就支付, 或者这个量的一半在一开始就支付, 其余部分在工作完全结束后再支付, 等等. 这给研究一般的支付规则提供了可能性.

两个极端的支付规则, 即一种是在参与者开始参与的时候就支付全部, 另一种是在参与者完成合作以后支付全部, 分别用 p^+ 和 p^- 来表示:

$$p^+(a)=\begin{cases}1, & \text{如果}\ 0<a\leqslant 1,\\ 0, & \text{如果}\ a=0.\end{cases}$$

$$p^-(a)=\begin{cases}1, & \text{如果}\ a=1,\\ 0, & \text{如果}\ 0\leqslant a<1.\end{cases}$$

很明显, 可以定义 $v\in\mathrm{FG}^N$ 的 proper p-核心, 即

$$C_p^P(v)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|\sum_{i\in N}x_i=v\left(e^N\right),\ \text{对每个}\ s\in\mathcal{PF}^N,\sum_{i\in N}p(s_i)x_i\geqslant v(s)\right\},$$

和 $v\in\mathrm{FG}^N$ 的 crisp p-核心, 即

$$C_p^{\rm cr}(v)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|\sum_{i\in N}x_i=v\left(e^N\right),\ \text{对每个}\ S\in 2^N,\sum_{i\in N}p(1)\,x_i\geqslant v\left(e^S\right)\right\}.$$

由于 $p(1)=1$, 故 crisp p-核心与 crisp 核心 $C^{\rm cr}(v)$ 是一样的.

注释 7.21 很容易注意到 $C_p(v)$, $C_p^P(v)$ 和 $C_p^{\rm cr}(v)\,(=C^{\rm cr}(v))$ 都是凸集.

对于 p-核心和 proper p-核心, 下列性质成立.

定理 7.22 令 $v\in{\rm FG}^N$, 那么

(i) 对任何的 $p,p'\in\boldsymbol{P}$, 如果对所有的 $a\in[0,1]$, $p(a)\leqslant p'(a)$ 成立, 则 $C_p(v)\subseteq C_{p'}(v)$ 并且 $C_p^P(v)\subseteq C_{p'}^P(v)$. 因此对所有的 $p\in\boldsymbol{P}$, 都有 $C_{p^-}(v)\subseteq C_p(v)\subseteq C_{p^+}(v)$ 和 $C_{p^-}^P(v)\subseteq C_p^P(v)\subseteq C_{p^+}^P(v)$;

(ii) 对任何 $p\in\boldsymbol{P}$, 都有 $C_p(v)\subseteq C_p^P(v)\subseteq C^{\rm cr}(v)$;

(iii) $C_{p^+}(v)\subseteq C_{p^+}^P(v)\subseteq C^{\rm cr}(v)$.

证明 (i) 任取 $x\in C_p(v)$, 那么 $\sum\limits_{i\in N}x_i=v\left(e^N\right)$ 以及对所有 $s\in\mathcal{F}^N$, 有 $\sum\limits_{i\in N}p(s_i)\,x_i\geqslant v(s)$. 由于 $x\in I(v)$ 蕴含对所有 $i\in N, x_i\geqslant v\left(e^i\right)\geqslant 0$, 如果对所有的 $a\in[0,1]$, $p(a)\leqslant p'(a)$, 则对所有 $i\in N, p(s_i)\,x_i\leqslant p'(s_i)\,x_i$. 因此对所有 $s\in\mathcal{F}^N$ 有, $\sum\limits_{i\in N}p'(s_i)\,x_i\geqslant v(s)$, 这蕴含 $x\in C_{p'}(v)$. 同样的证明方法可得 $C_p^P(v)\subseteq C_{p'}^P(v)$.

(ii) 这些结论很容易从 $C_p(v)$, $C_p^P(v)$ 和 $C^{\rm cr}(v)$ 的定义得到.

(iii) 由 (ii) 可得 $C_{p^+}(v)\subseteq C^{\rm cr}(v)$. 为了证明它的逆包含关系, 任取 $x\in C^{\rm cr}(v)$, 则 $\sum\limits_{i\in N}x_i=v\left(e^N\right)$, 以及对所有 $S\subseteq N$, 有 $\sum\limits_{i\in S}x_i\geqslant v\left(e^S\right)$ 成立. 任取 $s\in\mathcal{F}^N$, 只需证明 $\sum\limits_{i\in{\rm car}(p^+(s))}p^+(s_i)\,x_i\geqslant v(s)$. 由 p^+ 的定义,

$$p^+(s_i)=\begin{cases}1, & \text{如果}\ s_i>0,\\ 0, & \text{如果}\ s_i=0.\end{cases}$$

这样, 得到 $\sum\limits_{i\in{\rm car}(p^+(s))}p^+(s_i)\,x_i\geqslant\sum\limits_{i:s_i>0}x_i$. 令 $S=\{i|s_i>0\}$, 则 $\sum\limits_{i\in{\rm car}(p(s))}p^+(s_i)\,x_i\geqslant\sum\limits_{i:s_i>0}x_i=\sum\limits_{i\in S}x_i\geqslant v\left(e^S\right)\geqslant v(s)$. 最后一个不等式来源于 v 的单调性.

进一步, 当 $p=p^+$ 时无异议博弈的 p-核心是非空的. 但是, 正如例 7.4 中看到的 (亦可参见命题 7.6), 无异议博弈的 Aubin 核心可能是空集. 事实上, 有下面的定理.

定理 7.23 令 u_t 是参与者集合 N 上的无异议博弈, 则 $C_{p^+}(u_t)\neq\varnothing$.

证明 取 $x\in I(u_t)$, 即 $x\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=u_t\left(e^N\right)=1$, 并且对 $i\in N$,

$x_i \geqslant u_t(e^i) = 0$. 对 p^+, 有 $x \in C_{p^+}(u_t)$. 任取模糊联盟 $s \in \mathcal{F}^N$, 可能出现下列两种情况:

- 如果对所有的 $i \in N$, $s_i > t_i$, 则 $u_t(s) = 1$. 从 p^+ 的定义, 因为对所有的 $i \in N$, $s_i \geqslant t_i$, 故我们有对所有的 $i \in N$, $p(s_i) = 1$. 因此, $\sum_{i=1}^{n} p^+(s_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 = u_t(s)$.
- 如果存在 $i \in N$, 有 $s_i < t_i$, 则 $u_t(s) = 0$. 由于对所有的 $a \in [0,1]$, 有 $p^+(a) \geqslant 0$ 以及 $x_i \geqslant 0$, 因此有 $\sum_{i=1}^{n} p^+(s_i)x_i \geqslant 0 = u_t(s)$.

注释 7.24　存在异于 p^+ 的 $p \in \boldsymbol{P}$, 满足 $C_p(u_t) \neq \varnothing$. 如下给出一个 $p \in \boldsymbol{P}$ 的例子

$$p(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^*}a, & \text{如果 } a \in [0, t^*], \\ 1, & \text{如果 } a \in (t^*, 1]. \end{cases}$$

其中 $t^* = \min\{t_1, \cdots, t_n\}$. 与上面的证明相似, 可以证明 $C_p(u_t)$ 非空.

现在, 定义扩展的占优关系. 取一个模糊博弈 $v \in \mathrm{FG}^N$ 和一个函数 $p \in \boldsymbol{P}$. 对于任意两个转归 $x, y \in I(v)$, 和任意的模糊联盟 $s \in \mathcal{F}^N$, 如果对所有的 $i \in \mathrm{car}(p(s))$, 有 $p(s_i)x_i > p(s_i)y_i$, 以及 $\sum_{i \in N} p(s_i)x_i \leqslant v(s)$, 就说 x 通过 s p-占优 y, 记为 $x\,\mathrm{dom}_s^p\,y$. 如果至少存在一个 $s \in \mathcal{F}^N$, 满足 $x\,\mathrm{dom}_s^p\,y$, 则简单地说 x p-占优 y, 记为 $x\,\mathrm{dom}^p\,y$. 与 $x\,\mathrm{dom}_s y$ 的情况相似, 如果 $x\,\mathrm{dom}_s^p\,y$, 必有 $|\mathrm{car}(s)| < n$.

定义 7.25　模糊博弈 v 的 **p-优势核心** $\mathrm{DC}_p(v)$ 是一个不被任何其他转归 p-占优的转归的集合.

定义 7.26　模糊博弈 v 的 **p-稳定集** K_p 是一个满足下列性质的转归的集合:

(i) (p-内部稳定性) 对所有 $x, y \in K_p$, $\neg x\,\mathrm{dom}^p\,y$;

(ii) (p-外部稳定性) 对所有 $z \in I(v) \backslash K_p$, 存在一个转归 $x \in K_p$ 使得 $x\,\mathrm{dom}^p\,z$.

显然地, 我们有定理 7.12 (ii) 和 (iii) 的推广.

定理 7.27　令 $v \in \mathrm{FG}^N$ 和 $p \in \boldsymbol{P}$, 则

(i) $C_p^P(v) \subseteq \mathrm{DC}_p(v)$;

(ii) 对每个稳定集 K_p 都成立 $\mathrm{DC}_p(v) \subseteq K_p$;

(iii) 在 v 中 $x\,\mathrm{dom}^{p^+}\,y$ 当且仅当在 $w = \mathrm{cr}(v)$ 中 $x\,\mathrm{dom}\,y$, 这样, $\mathrm{DC}_{p^+}(v) = \mathrm{DC}(w)$, 并且 K 是 v 在 p^- 下的稳定集当且仅当 K 是 w 的稳定集.

证明　(i) 如果 $\mathrm{DC}_p(v) = I(v)$, 则定理显然成立. 因此, 假定 $\mathrm{DC}_p(v) \subset I(v)$. 令 $x \in I(v) \backslash \mathrm{DC}_p(v)$, 那么存在 $y \in I(v)$ 和 $s \in \mathcal{PF}^N$, 满足对于每个 $i \in \mathrm{car}(p(s))$, 有 $p(s_i)y_i > p(s_i)x_i$, 以及 $\sum_{i \in \mathrm{car}(p(s))} p(s_i)y_i \leqslant v(s)$, 那么, $\sum_{i \in \mathrm{car}(p(s))} p(s_i)x_i <$

$\sum\limits_{i\in \text{car}(p(s))} p(s_i)\, y_i \leqslant v(s)$, 因此, $x \in I(v)\backslash C_p^P(v)$, 得到结论, $C_p^P(v) \subset \text{DC}_p(v)$.

(ii) 令 K_p 是一个稳定集, 由于 $\text{DC}_p(v)$ 包含不被任何其他转归占优的转归, 以及由外部稳定性, 每个 $I(v)\backslash K_p$ 中的转归都被某个其他转归占优, 因此, $\text{DC}_p(v) \subset K_p$.

(iii) 假定在 v 中 $x\,\text{dom}_s^{p^+}\, y$, 那么 $\sum\limits_{i\in \text{car}(p(s))} p^+(s_i)\, x_i \leqslant v(s)$, 以及对于所有的 $i \in \text{car}(p(s))$ 有 $p^+(s_i)\, x_i > p^+(s_i)\, y_i$. 由于 $p^+(s_i) = 1$ 当且仅当 $s_i > 0$, 由 v 的单调性, 得 $\sum\limits_{i\in \text{car}(p(s))} x_i \leqslant v\left(e^{\text{car}(p(s))}\right)$, 并且对所有的 $i \in \text{car}(p(s))$, 有 $x_i > y_i$. 因此, 在 w 中 $x\,\text{dom}\, y$. 由于在 w 中的 $x\,\text{dom}_S\, y$ 有在 v 中的 $x\,\text{dom}_{e^S}^{p^+}\, y$, 它的逆方向成立. 剩下部分很容易证明.

下面的定理给出一个 p-核心和 p-支配核心相等的充分条件.

定理 7.28　令 $v \in \text{FG}^N$ 和 $p \in \boldsymbol{P}$, 满足对所有的 $a \in (0,1]$, $p(a) > 0$. 对每个满足 $\text{car}(p(s)) \neq \varnothing$ 的 $s \in \mathcal{F}^N$, 令 $p^*(s) = \min\limits_{i\in \text{car}(p(s))} p(s_i)$, 以及 $v_p^*(s) = \dfrac{v(s)}{p^*(s)}$. 假定对每个 $s \in \mathcal{PF}^N$, 有

$$v\left(e^N\right) - v_p^*(s) - \sum_{i\in N\backslash \text{car}(p(s))} v\left(e^i\right) \geqslant 0,$$

那么 $C_p^P(v) = \text{DC}_p(v)$, 因此 $\text{DC}_p(v)$ 是凸集.

证明　由定理 7.27 (i), $C_p^P(v) \subseteq \text{DC}_p(v)$. 下面通过 $x \notin C_p^P(v)$ 蕴含 $x \notin \text{DC}_p(v)$ 来证明这个逆包含关系, 如果 $I(v) = C_p^P(v)$, 由于 $C_p^P(v) \subseteq \text{DC}_p(v) \subseteq I(v)$, 容易证明 $C_p^P(v) = \text{DC}_p(v)$. 现在假定 $C_p^P(v) \subset I(v)$, 并取 $x \in I(v)\backslash C_p^P(v)$. 那么有 $s \in \mathcal{PF}^N$, 使得 $\sum\limits_{i\in \text{car}(p(s))} p(s_i)\, x_i < v(s)$, 则 $\sum\limits_{i\in \text{car}(p(s))} p^*(s)\, x_i < v(s)$, 因此 $\sum\limits_{i\in \text{car}(p(s))} x_i < v_p^*(s)$. 所以对每个 $i \in \text{car}(p(s))$, 可取 $\varepsilon_i > 0$, 使得 $\sum\limits_{i\in \text{car}(p(s))} (x_i + \varepsilon_i) < v_p^*(s)$, 以及 $\sum\limits_{i\in \text{car}(p(s))} p(s_i)(x_i + \varepsilon_i) < v(s)$. 定义 $y \in \mathbb{R}^n$ 为

$$y_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon_i, & \text{如果 } i \in \text{car}(p(s)), \\ v\left(e^i\right) + \dfrac{v\left(e^N\right) - v_p^*(s) - \sum\limits_{j\in N\backslash \text{car}(p(s))} v\left(e^j\right)}{|N\backslash \text{car}(p(s))|} + \delta_i, & \text{如果 } i \in N\backslash \text{car}(p(s)), \end{cases}$$

其中对所有的 $i \in N\backslash \text{car}(p(s))$, 有 $\delta_i > 0$, 且满足条件 $\sum\limits_{i\in N} y_i = v\left(e^N\right)$. 由于 $\sum\limits_{i\in \text{car}(p(s))} (x_i + \varepsilon_i) < v_p^*(s)$, 故可以取这样的 δ_i, $i \in N\backslash \text{car}(p(s))$. 注意到对每个

$i \in \operatorname{car}(p(s))$, $y_i > x_i \geqslant v(e^i)$. 进一步, 由于 $v(e^N) - v_p^*(s) - \sum_{j \in N \backslash \operatorname{car}(p(s))} v(e^j) \geqslant 0$, 则对每个 $i \in N \backslash \operatorname{car}(p(s))$, $y_i > v(e^i)$ 成立. 因此, $y \in I(v)$. 现在, 由于对所有的 $i \in \operatorname{car}(p(s))$, $y_i > x_i$, 因此对所有的 $i \in \operatorname{car}(p(s))$, 有 $p(s_i)y_i > p(s_i)x_i$ 成立. 进一步, $\sum_{i \in \operatorname{car}(p(s))} p(s_i)y_i < v(s)$, 因此 $y \operatorname{dom}^p x$. 由此得到 $x \in I(v) \backslash \mathrm{DC}^p(v)$. 最后, 由注释 7.21, $\mathrm{DC}^p(v)$ 是凸集.

7.4 Shapley 值和 Weber 集

令 $\pi(N)$ 是 N 的线性排序的集合, 对于 $v \in \mathrm{FG}^N$, 对每个 $\sigma \in \pi(N)$, 定义边际向量 $m^\sigma(v)$、模糊 Shapley 值 $\phi(v)$ 以及模糊 Weber 集 $W(v)$ 如下[17]:

(i) 对每个 $\sigma \in \pi(N)$, $m^\sigma(v) = m^\sigma(\operatorname{cr}(v))$;

(ii) $\phi(v) = \dfrac{1}{|N|!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \pi(N)} m^\sigma(v)$;

(iii) $W(v) = \operatorname{co}\{m^\sigma(v) | \sigma \in \pi(N)\}$.

注意, $\phi(v) = \phi(\operatorname{cr}(v))$, $W(v) = W(\operatorname{cr}(v))$. 进一步注意到, 对 $i = \sigma(k)$, 边际向量 $m^\sigma(v)$ 的第 i 个坐标 $m_i^\sigma(v)$ 定义为

$$m_i^\sigma(v) = v\left(\sum_{r=1}^{k} e^{\sigma(r)}\right) - v\left(\sum_{r=1}^{k-1} e^{\sigma(r)}\right).$$

可以认为每个 $\sigma \in \pi(N)$ 与下面的 n 步路是一致的: 沿着模糊联盟的超立方体的边, 从 $e^\varnothing$ 开始到 e^N 结束, 通过节点 $e^{\sigma(1)}$, $e^{\sigma(1)} + e^{\sigma(2)}$, $\cdots$, $\sum_{r=1}^{n-1} e^{\sigma(r)}$. 向量 $m^\sigma(v)$ 记录了从节点到节点的值的变化. 在文献 [124] 中的关于 crisp 博弈核心是该博弈的 Weber 集合的子集的结果可被推广到模糊博弈, 如下面命题中叙述.

命题 7.29　令 $v \in \mathrm{FG}^N$, 则 $C(v) \subset W(v)$.

证明　由注释 7.3, 有 $C(v) \subset C(\operatorname{cr}(v))$; 由定理 2.20, $C(\operatorname{cr}(v)) \subset W(\operatorname{cr}(v))$. 由于 $W(\operatorname{cr}(v)) = W(v)$, 得到 $C(v) \subset W(v)$.

注意, 模糊博弈的 Weber 集和模糊 Shapley 值是非常稳健的解概念, 因为它们完全由 crisp 合作的可能性来确定, 不用考虑那些由于参与者参与率的分级而带来的可能的额外选择. 对于模糊博弈更特别的解概念将在这一章以下的小节中介绍.

根据文献 [83], 对 C^1-博弈 v (也就是说, 特征函数是具有连续导数的可微函数的博弈), 可以定义对角线值 $\delta(v)$: 对每个 $i \in N$, $\delta(v)$ 的第 i 个坐标 $\delta_i(v)$ 定义为

$$\delta_i(v) = \int_0^1 D_i v(t, t, \cdots, t)\, \mathrm{d}t$$

其中 D_i 是 v 对于第 i 个坐标的偏导数. 根据定理 3.9, 对每个 crisp 博弈 $v \in G^N$, 有

$$\phi_i(v) = \delta_i(\mathrm{ml}(v)), \quad i \in N.$$

下个例子表示, 对一个模糊博弈 v, $\delta(v)$ 和 $\phi(\mathrm{cr}(v))$ 可以不同.

例 7.30 令 $v \in \mathrm{FG}^{\{1,2\}}$, 对每个 $s = (s_1, s_2) \in \mathcal{F}^{\{1,2\}}$, 满足 $v(s_1, s_2) = s_1(s_2)^2$. 那么

$$m^{(1,2)} = (v(1,0) - v(0,0), v(1,1) - v(1,0)) = (0,1),$$

$$m^{(2,1)} = (v(1,1) - v(0,1), v(0,1) - v(0,0)) = (1,0),$$

因此,

$$\phi(v) = \frac{1}{2}((0,1) + (1,0)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

进一步,

$$D_1 v(s_1, s_2) = (s_2)^2, \quad D_2 v(s_1, s_2) = 2 s_1 s_2,$$

因此,

$$\delta_1(v) = \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}, \quad \delta_2(v) = \int_0^1 2t^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

所以,

$$\delta(v) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \phi(v).$$

文献 [5] 和 [6] 研究了这种事实上是模糊值的对角线值. 对于这种值的推广, 读者可以参考文献 [31].

7.5 路解和路解覆盖

考虑在模糊联盟的超立方体 $[0,1]^N$ 上的路, 它以一种特殊方式连接 $e^{\varnothing}$ 和 e^N[19].

$\mathcal{F}^N$ 中的 $m+1$ 个不同点的序列 $q = \langle p^0, p^1, \cdots, p^m \rangle$ 称为是 $[0,1]^N$ 中的一条路 (长度为 m), 如果

(i) $p^0 = (0,0,\cdots,0)$, $p^m = (1,1,\cdots,1)$;

(ii) 对每个 $k \in \{0,\cdots,m-1\}$, $p^k \leqslant p^{k+1}$;

(iii) 对每个 $k \in \{0,\cdots,m-1\}$, 有一个参与者 $i \in N$ (在点 p^k 的行动参与者) 使得对所有的 $j \in N \backslash \{i\}$, 有 $(p^k)_j = (p^{k+1})_j$, $(p^k)_i < (p^{k+1})_i$.

对于一条路 $q=\langle p^0,p^1,\cdots,p^m\rangle$, 用 $Q_i(q)$ 表示参与者 i 是行动的点 p^k 的集合, 也就是说, $(p^k)_i<(p^{k+1})_i$. 给定一个博弈 $v\in \mathrm{FG}^N$ 和一条路 q, 对应于 v 和 q 的支付向量 $x^q(v)\in\mathbb{R}^n$ 的第 i 个坐标是, 对每个 $i\in N$,

$$x_i^q(v)=\sum_{k:p^k\in Q_i(q)}\left(v\left(p^{k+1}\right)-v\left(p^k\right)\right).$$

给定一条长度为 m 的这样的路 $\langle p^0,p^1,\cdots,p^m\rangle$ 和 $v\in\mathrm{FG}^N$, 可以想象这样一种情形, 在 N 中的参与者, 通过 m 步从非合作 $(p^0=0)$ 开始到完全合作 $(p^m=e^N)$ 为止, 其中, 每一步有一个参与者增加他的参与水平. 如果将这样一步的增加量给予行动参与者的话, 则最后的总计支付为向量 $x^q(v)=(x_i^q(v))_{i\in N}$. 注意 $x^q(v)$ 是一个有效向量, 也就是说, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^q(v)=v\left(e^N\right)$, 称 $x^q(v)$ 是路解 (path solution).

用 $Q(N)$ 表示在 $[0,1]^N$ 中路的集合, 然后用 $Q(v)$ 表示路解集合的凸包, 称其为路解覆盖 (path solution cover). 因此,

$$Q(v)=\mathrm{co}\left\{x^q(v)\in\mathbb{R}^n|q\in Q(N)\right\}.$$

注意, 所有路 $q\in Q(N)$ 的路长至少是 n. 路长为 n 的路共有 $n!$ 个; 每个这样的路对应于一种情况: 参与者一个接着一个, 按顺序 $\sigma(1),\cdots,\sigma(n)$, 从 0 到 1 增加他们的参与水平. 记这样的沿着 n 条边的路为 q^σ. 那么

$$q^\sigma=\left\langle 0,e^{\sigma(1)},e^{\sigma(1)}+e^{\sigma(2)},\cdots,e^N\right\rangle.$$

显然, $x^{q^\sigma}=m^\sigma(v)$. 因此

$$W(v)=\mathrm{co}\left\{x^{q^\sigma}(v)\,|\sigma\text{ 是 }N\text{ 的一个序}\right\}\subset Q(v).$$

根据命题 7.29, 模糊博弈的核心是一个 Weber 集合的子集. 因此有命题 7.31.

命题 7.31　对每个 $v\in\mathrm{FG}^N$, 有 $C(v)\subset W(v)\subset Q(v)$.

例 7.32　令 $v\in\mathrm{FG}^{\{1,2\}}$ 定义为, 对每个 $s=(s_1,s_2)\in\mathcal{F}^{\{1,2\}}$, 有 $v(s_1,s_2)=s_1(s_2)^2+s_1+2s_2$, 并且令 $q\in Q(N)$ 是由 $\left\langle(0,0),\left(\frac{1}{3},0\right),\left(\frac{1}{3},1\right),(1,1)\right\rangle$ 给定的长度为 3 的路. 那么 $x_1^q(v)=\left(v\left(\frac{1}{3},0\right)-v(0,0)\right)+\left(v(1,1)-v\left(\frac{1}{3},1\right)\right)=1\frac{2}{3}$, $x_2^q(v)=v\left(\frac{1}{3},1\right)-v\left(\frac{1}{3},0\right)=2\frac{1}{3}$. 因此, $\left(1\frac{2}{3},2\frac{1}{3}\right)\in Q(v)$. 由 $q^{(1,2)}=\langle(0,0),(1,0),(1,1)\rangle$ 和 $q^{(2,1)}=\langle(0,0),(0,1),(1,1)\rangle$ 给出的两个长度为 2 的最短路的支付向量分别为 $m^{(1,2)}(v)=(1,3)$ 和 $m^{(2,1)}(v)=(2,2)$.

根据 Aubin 核心、模糊 Weber 集和路解覆盖相互之间的关系, 下面介绍在这些集合上支付向量的下界和上界. 下界 (上界) 是一个支付向量, 它的第 i 个分量至多 (至少) 与参与者 i, 在 "最少希望"("最多希望") 的情况下他可以达到的支付一样好. 当使用下界和上界对时, 我们获得分别是 Aubin 核心、模糊 Weber 集和路解覆盖的捕捉器的超立方体. 下一节介绍模糊博弈的妥协值, 它是由在这三个捕捉器中取一个介于下界和上界之间的值而得到的.

$\mathbb{R}^n$ 中的超立方体是一个形如

$$[a,b]=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \text{对每个 } i\in N, a_i\leqslant x_i\leqslant b_i\right\}$$

的向量集合, 其中 $a,b\in\mathbb{R}^n$, $a\leqslant b$ (序 $\leqslant$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准偏序). 向量 a 和 b 称为超立方体 $[a,b]$ 的界向量, 其中, a 称为超立方体 $[a,b]$ 的下界向量, b 称为超立方体 $[a,b]$ 的上界向量. 给定一个集合 $A\subset\mathbb{R}^n$, 称超立方体 $[a,b]$ 是 A 的一个捕捉器, 如果 $A\subset[a,b]$; 并且称 $[a,b]$ 是 A 的一个紧捕捉器, 如果不存在超立方体严格包含在 $[a,b]$ 中, 且仍是 A 的一个捕捉器.

对于合作 crisp 博弈, 超立方体在文献 [72] 中起重要作用, 并且这个超立方体可以看做是这个 crisp 博弈的 Weber 集的一个紧捕捉器 (参见第 2.2 节). 同样在文献 [108] 和 [116] 中, 超立方体被看成 crisp 博弈核心的捕捉器.

下面主要介绍和研究具有非空 Aubin 核心的博弈 (也就是说属于 FG_*^N 的博弈) 的 Aubin 核心、模糊 Weber 集和路解覆盖的捕捉器.

首先介绍核心捕捉器, 对每个博弈 $v\in\mathrm{FG}_*^N$,

$$\mathrm{HC}(v)=\left[l\left(C\left(v\right)\right),u\left(C\left(v\right)\right)\right],$$

其中对每个 $k\in N$

$$l_k\left(C\left(v\right)\right)=\sup\left\{\varepsilon^{-1}v\left(\varepsilon e^k\right)\middle|\varepsilon\in(0,1]\right\},$$

和

$$u_k\left(C\left(v\right)\right)=\inf\left\{\varepsilon^{-1}\left(v\left(e^N\right)-v\left(e^N-\varepsilon e^k\right)\right)\middle|\varepsilon\in(0,1]\right\}.$$

命题 7.33 对每个 $v\in\mathrm{FG}_*^N$, 以及每个 $k\in N$:

$$-\infty<l_k\left(C\left(v\right)\right)\leqslant u_k\left(C\left(v\right)\right)<\infty,\quad \text{且 } C\left(v\right)\subset\mathrm{HC}\left(v\right).$$

证明 令 $x\in C(v)$.

(i) 对每个 $k\in N$, 以及 $\varepsilon\in(0,1]$, 有

$$v\left(e^N\right)-v\left(e^N-\varepsilon e^k\right)\geqslant\sum_{i\in N}x_i-\left(\left(1-\varepsilon\right)x_k+\sum_{i\in N\setminus\{k\}}x_i\right)=\varepsilon x_k.$$

因此,

$$x_k \leqslant \varepsilon^{-1}\left(v\left(e^N\right) - v\left(e^N - \varepsilon e^k\right)\right)$$

蕴含

$$x_k \leqslant u_k\left(C\left(v\right)\right) < \infty.$$

(ii) 对每个 $\varepsilon \in (0,1]$, 有 $\varepsilon x_k \geqslant v\left(\varepsilon e^k\right)$. 因此,

$$x_k \geqslant \sup\left\{\varepsilon^{-1} v\left(\varepsilon e^k\right) | \varepsilon \in (0,1]\right\} = l_k\left(C\left(v\right)\right) > -\infty.$$

结合 (i) 和 (ii), 获得命题中的不等式, 以及 $\mathrm{HC}(v)$ 是 $C(v)$ 的捕捉器的事实.

现在, 对每个 $v \in \mathrm{FG}_*^N$, 我们介绍在文献 [72] 中引进的模糊情况下的超立方体 $\mathrm{HW}(v)$,

$$\mathrm{HW}(v) = \left[l\left(W\left(v\right)\right), u\left(W\left(v\right)\right)\right],$$

其中对每个 $k \in N$, 有

$$l_k\left(W\left(v\right)\right) = \min\left\{v\left(e^{S\cup\{k\}}\right) - v\left(e^S\right) \middle| S \subset N\backslash\{k\}\right\}$$

和

$$u_k\left(W\left(v\right)\right) = \max\left\{v\left(e^{S\cup\{k\}}\right) - v\left(e^S\right) \middle| S \subset N\backslash\{k\}\right\},$$

因此有下面命题.

命题 7.34　对每个 $v \in \mathrm{FG}_*^N$, 超立方体 $\mathrm{HW}(v)$ 是 $W(v)$ 的紧捕捉器.

证明　留给读者.

称集合 $[a,b]$ 为广义的超立方体, 若其满足 $a \leqslant b$, $a \in (\mathbb{R}\cup\{-\infty\})^n$, $b \in (\mathbb{R}\cup\{\infty\})^n$.

现在, 对每个 $v \in \mathrm{FG}_*^N$ 我们介绍广义超立方体

$$\mathrm{HQ}(v) = \left[l\left(Q\left(v\right)\right), u\left(Q\left(v\right)\right)\right],$$

正如会在定理 7.35 中看到的, 它捕捉路解覆盖 $Q(v)$, 其中对 $k \in N$:

$$l_k\left(Q\left(v\right)\right) = \inf\left\{\varepsilon^{-1}\left(v\left(s + \varepsilon e^k\right) - v\left(s\right)\right) | s \in \mathcal{F}^N, s_k < 1, \varepsilon \in (0, 1 - s_k]\right\},$$

$$u_k\left(Q\left(v\right)\right) = \sup\left\{\varepsilon^{-1}\left(v\left(s + \varepsilon e^k\right) - v\left(s\right)\right) | s \in \mathcal{F}^N, s_k < 1, \varepsilon \in (0, 1 - s_k]\right\},$$

其中, $l_k\left(Q\left(v\right)\right) \in [-\infty, \infty)$ 和 $u_k\left(Q\left(v\right)\right) \in (-\infty, \infty]$.

注意到, $u\left(Q\left(v\right)\right) \geqslant u\left(C\left(v\right)\right)$, $l\left(Q\left(v\right)\right) \leqslant l\left(C\left(v\right)\right)$.

定理 7.35　对 $v \in \mathrm{FG}_*^N$, $\mathrm{HQ}(v)$ 是 $Q(v)$ 的捕捉器.

证明　这个断言来自于下面的事实: 对每个 $q \in Q(N)$ 和任意 $i \in N$

$$x_i^q(v) = \sum_{k: p^k \in Q_i(q)} \left(v\left(p^k + \left(p_i^{k+1} - p_i^k\right) e^i\right) - v\left(p^k\right)\right)$$

$$\leqslant \sum_{k:p^k \in Q_i(q)} \left(p_i^{k+1} - p_i^k\right) u_i \left(Q\left(v\right)\right) = u_i \left(Q\left(v\right)\right),$$

同样地,

$$x_i^q\left(v\right) \geqslant l_i\left(Q\left(v\right)\right).$$

注意, 模糊 Weber 集的捕捉器的上、下界是通过有限个值差分获得的, 其中, 仅仅是对应于 crisp 联盟的联盟在其中起作用. Aubin 核心和路解覆盖的捕捉器的上、下界的计算是基于无限数差分的.

7.6 妥 协 值

现在介绍模糊博弈关于每个集值解 C, W 和 Q 的 σ 型和 τ 型妥协值. 第一种类型是直接由 $\mathrm{HC}(v)$, $\mathrm{HW}(v)$ 和 $\mathrm{HQ}(v)$ 的界向量得到的; 而对于 τ 型妥协值, 用到了上界向量和由上界向量得到的剩余向量[19].

从第一种类型开始, 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的超立方体 $[a,b]$ 和一个博弈 $v \in \mathrm{FG}_*^N$, 使得超立方体至少含有一个有效向量, 即

$$[a,b] \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^n x_i = v\left(e^N\right) \right\} \neq \varnothing.$$

那么有一个从 a 到 b 线段上唯一的点 $c(a,b)$, 在意义 $\sum_{i=1}^n c_i(a,b) = v\left(e^N\right)$ 下它也是有效的. 因此, $c(a,b)$ 是 a 和 b 的凸组合, 也是有效的. 称 $c(a,b)$ 为介于 a 和 b 之间的可行妥协.

对于 $v \in \mathrm{FG}_*^N$, 现在介绍下列三种 σ-型的妥协值:

$$\mathrm{val}_C^\sigma(v) = c(\mathrm{HC}(v)) = c([l(C(v)), u(C(v))]),$$

$$\mathrm{val}_W^\sigma(v) = c(\mathrm{HW}(v)) = c([l(W(v)), u(W(v))]),$$

以及, 如果广义超立方体 $\mathrm{HQ}(v)$ 是个超立方体,

$$\mathrm{val}_Q^\sigma(v) = c(\mathrm{HQ}(v)) = c([l(Q(v)), u(Q(v))]).$$

注意到

$$\varnothing \neq C(v) \subset \mathrm{HC}(v) \subset \mathrm{HQ}(v) \tag{7.1}$$

和

$$\varnothing \neq C(v) \subset W(v) \subset \mathrm{HW}(v), \tag{7.2}$$

因此, 所有的超立方体包含有效向量, 前两个妥协值向量总是有效定义的.

τ 型妥协值来源于对于 crisp 博弈的最小恰当向量的定义[11,44](参见第 2.2 节), 对于 $v \in \mathrm{FG}_*^N$, 定义模糊最小恰当算子 $m^v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为, 对每个 $i \in N$ 和每个 $z \in \mathbb{R}^n$,

$$m_i^v(z) = \sup\left\{ s_i^{-1}\left(v(s) - \sum_{j \in N\setminus\{i\}} s_j z_j \right) \middle| s \in \mathcal{F}_0^N, s_i > 0 \right\}.$$

下列命题表明, m^v 赋予 Aubin 核心的每个上界 z (即对每个 $x \in C(v)$, 有 $z \geqslant x$) 一个 $C(v)$ 的下界 $m^v(z)$, 称为对应于 z 的剩余向量.

命题 7.36　令 $v \in \mathrm{FG}_*^N$, $z \in \mathbb{R}^n$ 是 $C(v)$ 的一个上界, 那么 $m^v(z)$ 是 $C(v)$ 的一个下界.

证明　令 $i \in N$, $x \in C(v)$. 对每个 $s \in \mathcal{F}^N$ 满足 $s_i > 0$, 有

$$\begin{aligned} s_i^{-1}\left(v(s) - \sum_{j \in N\setminus\{i\}} s_j z_j \right) &\leqslant s_i^{-1}\left(\sum_{j \in N} s_j x_j - \sum_{j \in N\setminus\{i\}} s_j z_j \right) \\ &= x_i + s_i^{-1} \sum_{j \in N\setminus\{i\}} s_j (x_j - z_j) \leqslant x_i, \end{aligned}$$

其中第一个不等式来源于 $x \in C(v)$, 第二个不等式来源于 z 是 $C(v)$ 的一个上界这个事实, 即 $z \geqslant x$. 因此对每个 $i \in N$ 有 $m_i^v(z) \leqslant x_i$, 这意味着 $m^v(z)$ 是 $C(v)$ 的一个下界.

现在介绍类 τ-型妥协值, 考虑到 $\mathrm{HC}(v)$, $\mathrm{HW}(v)$ 和 $\mathrm{HQ}(v)$ 的所有上界向量是 $v \in \mathrm{FG}_*^N$ 的 Aubin 核心的上界, 如 (7.1) 式和 (7.2) 式所示.

因此, 下列定义对 $v \in \mathrm{FG}_*^N$ 是有意义的:

$$\mathrm{val}_C^\tau(v) = c\left([m^v(u(C(v))), u(C(v))]\right),$$

$$\mathrm{val}_W^\tau(v) = c\left([m^v(u(W(v))), u(W(v))]\right),$$

以及, 如果广义超立方体 $\mathrm{HQ}(v)$ 是一个超立方体,

$$\mathrm{val}_Q^\tau(v) = c\left([m^v(u(Q(v))), u(Q(v))]\right).$$

妥协值 $\mathrm{val}_C^\tau(v)$ 是关于合作 crisp 博弈在文献 [108] 中引进的 τ 值的推广 (参见第 3.2 节), 妥协值 $\mathrm{val}_W^\tau(v)$ 是关于合作 crisp 博弈在文献 [12] 中的 χ 值、文献 [57] 中的 μ 值, 以及文献 [29] 和 [30] 中的值的推广.

第 8 章　凸模糊博弈

考虑凸性可得模糊博弈的一个有趣的类, 即凸模糊博弈. 凸模糊博弈可以成功地应用于解决很多经济情况的共享问题, 其中 "合作" 主要是为了获得盈利或节省成本; 对这样的博弈, 第 7 章介绍的所有解概念有很好的性质. 此外, 对于凸模糊博弈, 可以使用另外一些共享规则, 这些共享规则是基于更多的特殊解概念, 如参与单调分配机制和平等解等.

8.1　基 本 特 征

令 $v:[0,1]^n \to \mathbb{R}$, 那么 v 满足

(i) 超模性 (supermodularity, SM) 如果对所有的 $s,t \in [0,1]^N$,

$$v(s \vee t) + v(s \wedge t) \geqslant v(s) + v(t). \tag{8.1}$$

(ii) 按坐标分量凸性 (简称按分量凸, CwC) 如果对每个 $i \in N$ 和每个 $s^{-i} \in [0,1]^{N\setminus\{i\}}$, 函数 $g_{s^{-i}}:[0,1] \to \mathbb{R}$, 其中对每个 $t \in [0,1]$, $g_{s^{-i}}(t) = v\left(s^{-i}\|t\right)$(参见第 61 页) 是凸函数.

现在介绍凸模糊合作博弈的定义[17].

定义 8.1　令 $v \in \mathrm{FG}^N$, 如果 $v:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ 满足 SM 和 CwC, 则 v 称为**凸模糊博弈**.

注释 8.2　凸模糊博弈形成一个凸锥.

注释 8.3　对于凸模糊博弈的一个弱化定义, 我们参照文献 [120], 其中仅用到超模性.

正如在命题 8.4 中所示, 凸模糊博弈的一个较好的例子是无异议博弈, 其中最小获胜联盟对应于一个 crisp-类联盟.

命题 8.4　令 $u_t \in \mathrm{FG}^N$ 是一个基于模糊联盟 $t \in \mathcal{F}_0^N$ 的无异议博弈, 那么博弈 u_t 是凸的当且仅当对某个 $T \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 有 $t = e^T$.

证明　假定对某个 $T \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 有 $t \neq e^T$, 那么存在 $k \in N$ 满足 $\varepsilon = \min\{t_k, 1-t_k\} > 0$ 和 $0 = u_t\left(t+\varepsilon e^k\right) - u_t(t) < u_t(t) - u_t\left(t-\varepsilon e^k\right) = 1$, 故 u_t 不是凸的.

反过来, 假定对某个 $T \in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 有 $t = e^T$, 那么证明 u_t 有超模性, 并且按分量凸. 取 $s,k \in \mathcal{F}^N$, 分以下三种情况:

(1) 如果 $u_t(s \vee k) + u_t(s \wedge k) = 2$, 那么 $u_t(s \wedge k) = 1$. 这样, 超模性 (8.1) 直接由 $u_t(s) + u_t(k) \geqslant 2u_t(s \wedge k) = 2$ 得到.

(2) 如果 $u_t(s \vee k) + u_t(s \wedge k) = 0$, 那么 $u_t(s \vee k) = 0$. 因此, $u_t(s) + u_t(k) \leqslant 2u_t(s \vee k) = 0$, $u_t(s) + u_t(k) = 0$.

(3) 如果 $u_t(s \vee k) + u_t(s \wedge k) = 1$, 那么 $u_t(s \vee k) = 1$ 和 $u_t(s \wedge k) = 0$. 因此, $u_t(s)$ 或 $u_t(k)$ 必须等于零, 因此, $u_t(s) + u_t(k) \leqslant 1$ 以及超模性 (8.1) 满足.

因此, u_{e^T} 满足超模性.

为了证明 u_{e^T} 的按分量凸的性质, 注意到, 在定义按分量凸性中的所有函数 $g_{s^{-i}}$ 是凸的, 因为它们或者是常量 0, 或者是常量 1, 或者在 $[0,1)$ 上取 0, 在 1 上取 1. 因此, u_{e^T} 是凸博弈.

接下来, 具有参与者集合 N 的凸模糊博弈的集合将用 CFG^N 来表示. 显然, $\mathrm{CFG}^N \subset \mathrm{FG}^N$. 而具有参与者集合 N 的凸 crisp 博弈的集合是用 CG^N 表示的.

命题 8.5　令 $v \in \mathrm{CFG}^N$, 则 $\mathrm{cr}(v) \in \mathrm{CG}^N$.

证明　我们将证明 crisp 博弈 (参见 (5.1) 式), $\mathrm{cr}(v)$ 满足 SM. 取 $S, T \in 2^N$, 在应用 SM 性质 (8.1) 时, 分别用模糊博弈 e^S, e^T, $e^{S\cup T}$, $e^{S\cap T}$ 来取代 s, t, $s \vee t$, $s \wedge t$, 得到

$$\mathrm{cr}(v)(S \cup T) + \mathrm{cr}(v)(S \cap T) \geqslant \mathrm{cr}(v)(S) + \mathrm{cr}(v)(T).$$

凸模糊博弈的下一个性质与 crisp 博弈的参与者的边际贡献单增性有关 (参见定理 5.10 (iii)), 说的是在模糊联盟中一个参与者水平的增加, 对较大联盟的收益影响高于对较小联盟的收益影响.

命题 8.6　设 $v \in \mathrm{CFG}^N$. 令 $i \in N$, $s^1, s^2 \in \mathcal{F}^N$ 满足 $s^1 \leqslant s^2$, 并且令 $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ 满足 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1 - s_i^2$, 那么

$$v\left(s^1 + \varepsilon e^i\right) - v\left(s^1\right) \leqslant v\left(s^2 + \varepsilon e^i\right) - v\left(s^2\right). \tag{8.2}$$

证明　假定 $N = \{1, \cdots, n\}$. 对 $k \in \{1, \cdots, n\}$, 按 $c^0 = s^1$ 以及 $c^k = c^{k-1} + \left(s_k^2 - s_k^1\right) e^k$ 来定义模糊联盟 $c^0, c^1, \cdots, c^n$, 那么 $c^n = s^2$. 为了证明 (8.2) 式, 只需证明对每个 $k \in \{1, \cdots, n\}$ 不等式 (I^k) 成立:

$$v\left(c^k + \varepsilon e^i\right) - v\left(c^k\right) \geqslant v\left(c^{k-1} + \varepsilon e^i\right) - v\left(c^{k-1}\right). \tag{I^k}$$

注意到, (I^i) 式可以直接从 v 的按分量凸得到, 并且对于 $k \neq i$, (I^k) 式可以从 SM 中用 $c^{k-1} + \varepsilon e^i$ 取代 s 和 c^k 取代 t 得到. 那么 $s \vee t = c^k + \varepsilon e^i$, $s \wedge t = c^{k-1}$.

同样, 联盟的边际贡献 (参见定理 5.10 (ii)) 也有类似的单增性质, 如下

命题 8.7　设 $v \in \mathrm{CFG}^N$. 令 $s, t \in \mathcal{F}^N$ 以及 $z \in \mathbb{R}_+^n$ 使得 $s \leqslant t \leqslant t + z \leqslant e^N$, 那么

$$v(s + z) - v(s) \leqslant v(t + z) - v(t). \tag{8.3}$$

证明 对每个 $k\in\{1,\cdots,n\}$, 由命题 8.6$\left(\text{由 } s+\sum\limits_{r=1}^{k-1}z_re^r \text{ 取代 } s^1,\ t+\sum\limits_{r=1}^{k-1}z_re^r\right.$ 取代 s^2, k 取代 i, 以及 z_k 取代 $\left.\varepsilon\right)$ 得到

$$v\left(s+\sum_{r=1}^{k}z_re^r\right)-v\left(s+\sum_{r=1}^{k-1}z_re^r\right)\leqslant v\left(t+\sum_{r=1}^{k}z_re^r\right)-v\left(t+\sum_{r=1}^{k-1}z_re^r\right).$$

将这 n 个不等式相加, 得到不等式 (8.3) 式.

下一个命题介绍了凸模糊博弈的一个特征性质, 我们称之为平均边际回报单增性 (increasing average marginal return property, IAMR). 这个性质表示这样一个事实, 对一个凸博弈, 在一个较小的联盟中参与者的参与水平的增加所产生的每单位水平的增值, 比在一个较大的联盟中参与者的参与水平的增加所产生的每单位水平的增值小, 前提是在较小联盟中达到的参与水平是不大于在较大联盟中达到的参与水平的.

命题 8.8 设 $v\in\mathrm{CFG}^N$. 令 $i\in N$, $s^1,s^2\in\mathcal{F}^N$ 满足 $s^1\leqslant s^2$, 并且令 $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ 满足 $s_i^1+\varepsilon_1\leqslant s_i^2+\varepsilon_2\leqslant 1$, 那么

$$\varepsilon_1^{-1}\left(v\left(s^1+\varepsilon_1e^i\right)-v\left(s^1\right)\right)\leqslant\varepsilon_2^{-1}\left(v\left(s^2+\varepsilon_2e^i\right)-v\left(s^2\right)\right). \tag{8.4}$$

证明 由命题 8.6 (分别由 s^1, $\left(s^2+\left(s_i^1-s_i^2\right)e^i\right)$ 和 ε_1 取代 s^1, s^2 和 ε), 得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1^{-1}\left(v\left(s^2+\left(s_i^1-s_i^2+\varepsilon_1\right)e^i\right)-v\left(s^2+\left(s_i^1-s_i^2\right)e^i\right)\right)\\ \geqslant&\varepsilon_1^{-1}\left(v\left(s^1+\varepsilon_1e^i\right)-v\left(s^1\right)\right).\end{aligned}$$

进一步, 由 CwC (并注意到 $s_i^2+\varepsilon_2\geqslant s_i^2+\left(s_i^1-s_i^2+\varepsilon_1\right)$, $s_i^2\geqslant s_i^2+\left(s_i^1-s_i^2\right)$), 有

$$\begin{aligned}&\varepsilon_2^{-1}\left(v\left(s^2+\varepsilon_2e^i\right)-v\left(s^2\right)\right)\\ \geqslant&\varepsilon_1^{-1}\left(v\left(s^2+\left(s_i^1-s_i^2+\varepsilon_1\right)e^i\right)-v\left(s^2+\left(s_i^1-s_i^2\right)e^i\right)\right),\end{aligned}$$

得到要证的不等式.

定理 8.9 设 $v\in\mathrm{FG}^N$, 则下列断言是等价的:

(i) $v\in\mathrm{CFG}^N$;

(ii) v 满足 IAMR.

证明 由命题 8.8 知, 凸博弈满足 IAMR. 另一方面, 很明显, IAMR 隐含 CwC. 所以, 只需证明, IAMR 隐含 SM. 因此, 给定 $s,t\in\mathcal{F}^N$, 必须首先证明不等式 (8.1).

令 $P=\{i\in N|t_i<s_i\}$. 如果 $P=\varnothing$, 则由事实 $s\vee t=t$, $s\wedge t=s$ 得 (8.1) 式成立. 对于 $P\neq\varnothing$, 按照序列 $\sigma(1),\cdots,\sigma(p)$ 重新排列 P 中的元素, 其中 $p=|P|$, 并且对 $k\in\{1,\cdots,p\}$, 令 $\varepsilon_{\sigma(k)}=s_{\sigma(k)}-t_{\sigma(k)}>0$. 注意, 在这种情况下

$$s = s \wedge t + \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{\sigma(k)} e^{\sigma(k)}, \quad s \vee t = t + \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{\sigma(k)} e^{\sigma(k)}.$$

因此

$$\begin{aligned} & v(s) - v(s \wedge t) \\ =& \sum_{r=1}^{p} \left(v\left(s \wedge t + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{\sigma(k)} e^{\sigma(k)} \right) - v\left(s \wedge t + \sum_{k=1}^{r-1} \varepsilon_{\sigma(k)} e^{\sigma(k)} \right) \right). \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & v(s \vee t) - v(t) \\ =& \sum_{r=1}^{p} \left(v\left(t + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{\sigma(k)} e^{\sigma(k)} \right) - v\left(t + \sum_{k=1}^{r-1} \varepsilon_{\sigma(k)} e^{\sigma(k)} \right) \right). \end{aligned}$$

由这些不等式, 由于对每个 $r \in \{1, \cdots, p\}$, IAMR 隐含

$$\begin{aligned} & v\left(s \wedge t + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{\sigma(k)} e^{\sigma(k)} \right) - v\left(s \wedge t + \sum_{k=1}^{r-1} \varepsilon_{\sigma(k)} e^{\sigma(k)} \right) \\ \leqslant & v\left(t + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{\sigma(k)} e^{\sigma(k)} \right) - v\left(t + \sum_{k=1}^{r-1} \varepsilon_{\sigma(k)} e^{\sigma(k)} \right), \end{aligned}$$

则 (8.1) 式成立.

接下来, 我们研究函数 $v : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ 可以满足的其他两个性质[113]. 第一个称为一阶偏导数的单调性 (monotonicity of the first partial derivatives property, MOPAD), 第二个是方向凸性 (directional convexity property, DICOV), 都是在文献 [70] 中引进的.

令 $i \in N$, $s \in [0,1]^N$, 我们说 v 在 s $(0 < s_i \leqslant 1)$ 处的第 i 个方向的左导数 $D_i^- v(s)$ 存在, 如果 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \varepsilon^{-1} \left(v(s) - v\left(s - \varepsilon e^i \right) \right)$ 存在并且有限; 定义

$$D_i^- v(s) := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \varepsilon^{-1} \left(v(s) - v\left(s - \varepsilon e^i \right) \right).$$

类似地, v 在对 s $(0 \leqslant s_i < 1)$ 处的第 i 个方向的右导数, 记为 $D_i^+ v(s)$, 是 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \varepsilon^{-1} \left(v\left(s + \varepsilon e^i \right) - v(s) \right)$, 前提是这个极限存在并且有限. 为了方便, 如果 $s_i = 0$, 则记 $D_i^- v(s) = -\infty$, 如果 $s_i = 1$, 则记 $D_i^+ v(s) = \infty$.

定义 8.10 称 $v : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ 满足 **MOPAD**, 如果对每个 $i \in N$, 下列四个条件满足

(Ma) 对每个满足 $0 < s_i \leqslant 1$ 的 $s \in [0,1]^N$, $D_i^- v(s)$ 存在;

(Mb) 对每个满足 $0 \leqslant s_i < 1$ 的 $s \in [0,1]^N$, $D_i^+ v(s)$ 存在;

(Mc) $D_i^- v(s) < D_i^+ v(s)$;

(Md) 对满足 $s^1 \leqslant s^2$ 的任何 $s^1, s^2 \in [0,1]^N$, 有 $D_i^- v(s^1) \leqslant D_i^- v(s^2)$ 和 $D_i^+ v(s^1) \leqslant D_i^+ v(s^2)$.

定义 8.11 令 $[a,b] = \{x \in [0,1]^N | \text{对每个 } i \in N, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$, 称 $v : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ 满足 **DICOV**, 如果对满足 $a \leqslant b$ 的任何 $a, b \in [0,1]^N$ 以及满足 $c + d = a + b$ 的每对 $c, d \in [a,b]$, 有

$$v(a) + v(b) \geqslant v(c) + v(d).$$

引理 8.12 令 $s \in [0,1]^N, i \in N$ 满足 $0 \leqslant s_i < 1$ 和 $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < \varepsilon_3 \leqslant 1 - s_i$. 如果 $v : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ 满足 MOPAD, 则

$$\varepsilon_1^{-1}\left(v\left(s+\varepsilon_1 e^i\right)-v(s)\right) \leqslant (\varepsilon_3-\varepsilon_2)^{-1}\left(v\left(s+\varepsilon_3 e^i\right)-v\left(s+\varepsilon_2 e^i\right)\right).$$

证明 由左导数的定义和 (Md), 得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1^{-1}\left(v\left(s+\varepsilon_1 e^i\right)-v(s)\right)=\varepsilon_1^{-1}\int_0^{\varepsilon_1} D_i^- v\left(s+x e^i\right)\mathrm{d}x\\
\leqslant&\varepsilon_1^{-1}\int_0^{\varepsilon_1} D_i^- v\left(s+\varepsilon_1 e^i\right)\mathrm{d}x=D_i^- v\left(s+\varepsilon_1 e^i\right)\leqslant D_i^- v\left(s+\varepsilon_2 e^i\right)\\
=&(\varepsilon_3-\varepsilon_2)^{-1}\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} D_i^- v\left(s+\varepsilon_2 e^i\right)\mathrm{d}x\leqslant(\varepsilon_3-\varepsilon_2)^{-1}\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} D_i^- v\left(s+x e^i\right)\mathrm{d}x\\
=&(\varepsilon_3-\varepsilon_2)^{-1}\left(v\left(s+\varepsilon_3 e^i\right)-v\left(s+\varepsilon_2 e^i\right)\right).
\end{aligned}$$

如果特征函数 v 是连续的, 下面的定理与前面介绍的性质等价.

定理 8.13 令 $v : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 下列断言是等价的:

(i) v 满足 SM 和 CwC;

(ii) v 满足 MOPAD;

(iii) v 满足 IAMR;

(iv) v 满足 DICOV.

证明 (i)⇒(ii) 在 MOPAD 的定义中 (Ma), (Mb) 和 (Mc) 可以由 CwC 得到. 为了证明 (Md), 首先注意, 对满足 $s_i^1 = 0$ 的 s^1, 有 $D_i^- v(s^1) = -\infty \leqslant D_i^- v(s^2)$. 如果 $s_i^1 > 0$, 则 CwC 隐含 (参见命题 8.6) 对于满足 $s_i^1 - \varepsilon \geqslant 0$ 的 $\varepsilon > 0$,

$$v\left(s^1\right)-v\left(s^1-\varepsilon e_i\right) \leqslant v\left(s^2\right)-v\left(s^2-\varepsilon e_i\right).$$

通过在上面的不等式的两边分别乘以 ε^{-1}, 并且取 ε 趋向于 0 的极限, 得到 $D_i^- v(s^1) \leqslant D_i^- v(s^2)$. 相同方法可以证明 (Md) 中的第二个不等式.

(ii)⇒(iii) 假定 v 满足 MOPAD. 需要证明对满足 $a \leqslant b$ 的任何 $a, b \in [0,1]^N$, 以及满足 $a_i + \delta \leqslant b_i + \varepsilon \leqslant 1$ 的每个 $i \in N$, $\delta \in (0, 1-a_i]$ 和 $\varepsilon \in (0, 1-b_i]$, 有

$$\delta^{-1}\left(v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(a\right)\right)\leqslant\varepsilon^{-1}\left(v\left(b+\varepsilon e^{i}\right)-v\left(b\right)\right). \tag{8.5}$$

按照上面方法取 a, b, i, δ 和 ε, 令 $c=a+(b_i-a_i)\,e^{i}$ 和 $d=b+(a_i+\delta-b_i)\,e^{i}$. 考虑下面两种情况:

(α) $a_i+\delta\leqslant b_i$, 则

$$\delta^{-1}\left(v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(a\right)\right)=\delta^{-1}\int_0^{\delta}D_i^{-}v\left(a+xe^{i}\right)\mathrm{d}x\leqslant\delta^{-1}\int_0^{\delta}D_i^{-}v\left(a+\delta e^{i}\right)\mathrm{d}x$$
$$=D_i^{-}v\left(a+\delta e^{i}\right)\leqslant D_i^{-}v\left(b\right)\leqslant\varepsilon^{-1}\int_0^{\varepsilon}D_i^{-}v\left(b+xe^{i}\right)\mathrm{d}x=\varepsilon^{-1}\left(v\left(b+\varepsilon e^{i}\right)-v\left(b\right)\right),$$

其中的不等式来源于 (Md).

(β) $a_i+\delta\in(b_i,b_i+\varepsilon]$, 则

$$\delta^{-1}\left(v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(a\right)\right)=\delta^{-1}\left(v\left(c\right)-v\left(a\right)\right)+\delta^{-1}\left(v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(c\right)\right)$$
$$\leqslant\delta^{-1}\left(c_i-a_i\right)\left(a_i+\delta-c_i\right)^{-1}\left(v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(c\right)\right)+\delta^{-1}\left(v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(c\right)\right)$$
$$=\left(a_i+\delta-c_i\right)^{-1}\left(v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(c\right)\right),$$

这里的不等式来源于引理 8.12, 其中取 $s=a$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=c_i-a_i<\delta=\varepsilon_3$.

这样, 有

$$\delta^{-1}\left(v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(a\right)\right)\leqslant\left(a_i+\delta-c_i\right)^{-1}\left(v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(c\right)\right). \tag{8.6}$$

同样地, 由引理 8.12, 其中取 $s=b$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=d_i-b_i<\varepsilon=\varepsilon_3$, 得到

$$\left(d_i-b_i\right)^{-1}\left(v\left(d\right)-v\left(b\right)\right)\leqslant\varepsilon^{-1}\left(v\left(b+\varepsilon e^{i}\right)-v\left(b\right)\right). \tag{8.7}$$

进一步, 在 (Md) 中, 分别用 $(a_{-i},t)=(a_1,\cdots,a_{i-1},t,a_{i+1},\cdots,a_n)$ 和 $(b_{-i},t)=(b_1,\cdots,b_{i-1},t,\ b_{i+1},\cdots,b_n)$ 取代 s^1 和 s^2, 以及等式 $a_i+\delta=d_i$, $c_i=b_i$, 得到

$$v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(c\right)=\int_{c_i}^{a_i+\delta}D_i^{-}v\left(a_{-i},t\right)\mathrm{d}t\leqslant\int_{b_i}^{d_i}D_i^{-}v\left(b_{-i},t\right)\mathrm{d}t\leqslant v\left(d\right)-v\left(b\right).$$

现在, 由于 $a_i+\delta-c_i=d_i-b_i$, 则有

$$\left(a_i+\delta-c_i\right)^{-1}\left(v\left(a+\delta e^{i}\right)-v\left(c\right)\right)\leqslant\left(d_i-b_i\right)^{-1}\left(v\left(d\right)-v\left(b\right)\right). \tag{8.8}$$

通过 (8.8) 式, 结合 (8.6) 式和 (8.7) 式 (通过不等式关系的传递性), 得 (8.5) 式成立.

(iii)⇒(iv) 假定 v 满足 IAMR. 取 $a,b\in[0,1]^N$, 满足 $a\leqslant b$, 以及取 $c,d\in[a,b]$, 满足 $c+d=a+b$. 定义 $h=b-c$, 那么 $b=c+h$ 以及 $d=a+h$. 有

$$v\left(b\right)-v\left(c\right)=\sum_{r=1}^{n}\left(v\left(c+\sum_{i=1}^{r}h_ie^{i}\right)-v\left(c+\sum_{i=1}^{r-1}h_ie^{i}\right)\right)$$

$$\geqslant \sum_{r=1}^{n}\left(v\left(a+\sum_{i=1}^{r}h_ie^i\right)-v\left(a+\sum_{i=1}^{r-1}h_ie^i\right)\right)=f(d)-f(a),$$

其中的不等式是应用了 n 次 IAMR.

(iv)⇒(i) 令 v 满足 DICOV. 为了证明 v 也满足 CwC, 注意到对于 $s^{-i}\in[0,1]^{N\backslash\{i\}}$ 以及 $0\leqslant p<\frac{1}{2}(p+q)<q\leqslant 1$, 有 $\left(s^{-i}\middle\|\frac{1}{2}(p+q)\right)\in\left[\left(s^{-i}\|p\right),\left(s^{-i}\|q\right)\right]$. 因此, (iv) 以及 $a=\left(s^{-i}\|p\right), b=\left(s^{-i}\|q\right), c=d=\left(s^{-i}\middle\|\frac{1}{2}(p+q)\right)$ 蕴含 $v\left(s^{-i}\|p\right)+v\left(s^{-i}\|q\right)\geqslant 2v\left(s^{-i}\middle\|\frac{1}{2}(p+q)\right)$.

为了证明 v 满足 SM, 令 $c,d\in[0,1]^N$, 那么 $c,d\in[c\wedge d,c\vee d]$, 由 (iv) 可以得到 $v(c\vee d)+v(c\wedge d)\geqslant v(c)+v(d)$.

最后, 介绍第五个性质, 它可以给出凸模糊博弈的一个非常简单的描述. 其中, 要求 $v:[0,1]^N\to\mathbb{R}$ 的所有二阶偏导数是非负的 (NNSPAD).

定义 8.14 令 $v\in C^2$. 那么 v 在 $[0,1]^N$ 上满足 **NNSPAD**, 如果对所有的 $i,j\in N$, 有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s_i\partial s_j}\geqslant 0.$$

明显地, 性质 MOPAD 和 NNSPAD 在 C^2-函数类上是等价的.

注释 8.15 文献 [101] 中已经证明, 如果 $v\in C^2$, 那么 DICOV 蕴含 NNSPAD.

注释 8.16 对每个 $r\in\{1,\cdots,m\}$, 以及每个 $s\in[0,1]^N$, 定义 $\mu_r(s)=\sum\limits_{i\in N}s_i\mu_r(\{i\})$ 满足对每个 $i\in N$, $\mu_r(\{i\})\geqslant 0$ 和 $\sum\limits_{i\in N}\mu_r(\{i\})\leqslant 1$. 如果 $f\in C^1$ 满足 DICOV, 那么具有 $v(s)=f(\mu_1(s),\cdots,\mu_m(s))$ 形式的 v 是凸博弈[70].

8.2 凸模糊博弈中的平等主义

这一节介绍凸模糊博弈的平等主义解. 我们通过构造性方法修改传统的 Dutta-Ray 的用于凸 crisp 博弈的算法.

正如在 5.2.3 小节中提到的, 用于凸 crisp 博弈的 Dutta-Ray 算法的每一步都存在一个最大元素. 注意, 特征函数的超模性等价于对应 crisp 博弈的凸性.

虽然凸模糊博弈和它相应的 (凸) crisp 博弈的核心是一致的, 并且 Dutta-Ray 受限平等解是一个重要元素, 而寻找凸模糊博弈平等解本身就是一个任务. 正如我们在引理 8.17 中看到的, 模糊博弈的超模性蕴含了对应的 (可能无限) 具有最大平均值的模糊联盟集的半格结构 (参见 (6.1) 式), 但是, 它不足以保证最大元素的存

在性. 对仅仅满足超模性的模糊博弈出现的不同困难由三个例子可以说明. 根据引理 8.21, 在超模性的基础上增加按坐标分量的凸性, 对于存在这样一个最大元素是充分的; 进一步, 这个元素对应于一个 crisp 联盟. 那么, 我们得到一个用于计算凸模糊博弈的平等解的简单方法[8].

引理 8.17　令 $v \in \mathrm{FG}^N$ 是一个超模博弈, 那么集合

$$A(N,v) := \left\{ t \in \mathcal{F}_0^N \middle| \alpha(t,v) = \sup_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v) \right\}$$

是关于结合算子 $\vee$ 的闭集.

证明　令 $\overline{\alpha} = \sup\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v)$. 如果 $\overline{\alpha} = \infty$, 那么 $A(N,v) = \varnothing$, 因此 $A(N,v)$ 是关于结合算子的闭集.

现在假定 $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$. 取 $t^1, t^2 \in A(N,v)$. 下面要证明 $t^1 \vee t^2 \in A(N,v)$, 即 $\alpha\left(t^1 \vee t^2, v\right) = \overline{\alpha}$.

由 $v\left(t^1\right) = \overline{\alpha}\lceil t^1 \rfloor$, $v\left(t^2\right) = \overline{\alpha}\lceil t^2 \rfloor$, 得到

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}\lceil t^1 \rfloor + \overline{\alpha}\lceil t^2 \rfloor = v\left(t^1\right) + v\left(t^2\right) &\leqslant v\left(t^1 \vee t^2\right) + v\left(t^1 \wedge t^2\right) \\ &\leqslant \overline{\alpha}\lceil t^1 \vee t^2 \rfloor + \overline{\alpha}\lceil t^1 \wedge t^2 \rfloor = \overline{\alpha}\lceil t^1 \rfloor + \overline{\alpha}\lceil t^2 \rfloor, \end{aligned}$$

其中第一个不等式来源于 SM, 第二个不等式来源于 $\overline{\alpha}$ 的定义, 以及事实 $v\left(e^{\varnothing}\right) = 0$. 这蕴含 $v\left(t^1 \vee t^2\right) = \overline{\alpha}\lceil t^1 \vee t^2 \rfloor$, 因此 $t^1 \vee t^2 \in A(N,v)$.

从引理 8.17 的证明可以得到结论, 在 $t^1, t^2 \in A(N,v)$ 的情况下, 不但 $t^1 \vee t^2 \in A(N,v)$, 而且, 在 $t^1 \wedge t^2 \neq \varnothing$ 时, $t^1 \wedge t^2 \in A(N,v)$. 进一步, $A(N,v)$ 是关于有限 "并" 算子的闭集, 其中, $t^1 \vee t^2$ 被看成是 t^1 和 t^2 的 "并".

如果用与文献 [46] 相似的方法介绍超模性模糊博弈的平等主义规则, 那么可能出现问题, 因为非空模糊联盟的集合是无限的, 并且不一定存在满足 "每单位参与水平的最大值" 的最大模糊联盟. 更精确一些, 如果 $v \in \mathrm{FG}^N$ 是一个超模性模糊博弈, 那么重要的问题是

(1) $\sup\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v)$ 是否是有限的? 例 8.18 给出了一个 $\sup\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v)$ 是无限的模糊博弈的例子.

(2) 在 $\sup\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v)$ 有限的情况下, 是否有 $t \in \mathcal{F}_0^N$ 使得 $\alpha(t,v) = \sup\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v)$? 一个模糊博弈满足 $\arg \sup\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v)$ 是空集的例子在例 8.19 中给出. 注意, 如果集合 $\arg \sup\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v)$ 非空, 那么 $\sup\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v) = \max\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v)$.

(3) 令 "$\geqslant$" 是 $[0,1]^N$ 上的标准偏序. 假定 $\max\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v)$ 存在. 集合 $\arg \sup\limits_{s \in \mathcal{F}_0^N} \alpha(s,v)$ 关于 $\geqslant$ 在 $\mathcal{F}_0^N$ 中是否有最大元素? 在例 8.20 中说明, 对于模糊博弈这个不

总是成立的.

例 8.18 令 $v \in \mathrm{FG}^{\{1,2\}}$ 满足对每个 $s=(s_1,s_2)\in\mathcal{F}^{\{1,2\}}$, 有

$$v(s_1,s_2)=\begin{cases} s_2\tan\dfrac{\pi s_1}{2}, & \text{如果 } s_1\in[0,1),\\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

对于这个博弈, $\sup\limits_{s\in\mathcal{F}_0^{\{1,2\}}}\alpha(s,v)=\infty$.

例 8.19 令 $v\in\mathrm{FG}^{\{1,2,3\}}$ 满足对每个 $s=(s_1,s_2,s_3)\in\mathcal{F}^{\{1,2,3\}}$, 有

$$v(s_1,s_2,s_3)=\begin{cases} (s_1+s_2+s_3)^2, & \text{如果 } s_1,s_2,s_3\in[0,1),\\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

对于这个博弈, $\sup\limits_{s\in\mathcal{F}_0^{\{1,2,3\}}}\alpha(s,v)=3$, 并且 $\arg\sup\limits_{s\in\mathcal{F}_0^{\{1,2,3\}}}\alpha(s,v)=\varnothing$.

例 8.20 令 $v\in\mathrm{FG}^{\{1,2\}}$ 满足对每个 $s=(s_1,s_2)\in\mathcal{F}^{\{1,2\}}$, 有

$$v(s_1,s_2)=\begin{cases} s_1+s_2, & \text{如果 } s_1,s_2\in[0,1),\\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

对于这个博弈, $\max\limits_{s\in\mathcal{F}_0^{\{1,2\}}}\alpha(s,v)=1$, $\arg\max\limits_{s\in\mathcal{F}_0^{\{1,2\}}}\alpha(s,v)=[0,1)\times[0,1)\setminus\{0\}$. 但是这个集合没有关于 $\geqslant$ 的最大元素.

可以很容易检验, 例 8.18, 例 8.19 和例 8.20 中的例子都是有超模性的, 但不是凸的 (CwC 不满足). 对于凸模糊博弈, 所有上面提到的三个问题在定理 8.23 中都有肯定的答案. 通过这个定理, 下面的问题也可以解决: "在修改算法的步骤中如何定义约简博弈, 并且这个算法是否只有有限步?"

引理 8.21 的证明将用到联盟的模糊度 (参见第 61 页) 的概念. 注意, 对于具有模糊度 $\varphi(s)=0$ 的 $s\in\mathcal{F}_0^N$, 有 $\alpha(s,v)\leqslant\max\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\alpha\left(e^S,v\right)$, 因为存在某些 $T\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, 使得 $s=e^T$.

引理 8.21 令 $v\in\mathrm{CFG}^N$ 及 $s\in\mathcal{F}_0^N$. 如果 $\varphi(s)>0$, 那么存在 $t\in\mathcal{F}_0^N$, 满足 $\varphi(t)=\varphi(s)-1$, $\operatorname{car}(t)\subset\operatorname{car}(s)$, 且 $\alpha(t,v)\geqslant\alpha(s,v)$; 如果 $\alpha(t,v)=\alpha(s,v)$, 则 $t\geqslant s$.

证明 取 $s\in\mathcal{F}_0^N$ 满足 $\varphi(s)>0$, $i\in N$ 满足 $s_i\in(0,1)$. 考虑 $t^0=\left(s^{-i},0\right)$, $t^1=\left(s^{-i},1\right)$. 注意到, $\varphi\left(t^0\right)=\varphi\left(t^1\right)=\varphi(s)-1$, $\operatorname{car}\left(t^0\right)\subset\operatorname{car}\left(t^1\right)=\operatorname{car}(s)$.

如果 $t^0=e^{\varnothing}$, 则 $t^1=e^i$, 并且由 CwC 有 $\alpha\left(e^i,v\right)\geqslant\alpha\left(s_ie^i,v\right)=\alpha(s,v)$, 则取 $t=e^i$.

如果 $t^0\neq e^{\varnothing}$, 并且 $\alpha\left(t^0,v\right)>\alpha(s,v)$, 则取 $t=t^0$.

现在探讨 $t^0\neq e^{\varnothing}$ 且 $\alpha\left(t^0,v\right)\leqslant\alpha(s,v)$ 的情况. 由上面最后一个不等式, 以及由 $\dfrac{v(s)}{\lceil s\rfloor}$ 是 $\dfrac{v\left(t^0\right)}{\lceil t^0\rfloor}$ 和 $\dfrac{v(s)-v\left(t^0\right)}{\lceil s-t^0\rfloor}$ 的凸组合, 即

$$\alpha(s,v)=\frac{v(s)}{\lceil s\rfloor}=\frac{\lfloor t^0\rfloor}{\lceil s\rfloor}\cdot\frac{v(t^0)}{\lceil t^0\rfloor}+\frac{\lfloor s-t^0\rfloor}{\lceil s\rfloor}\cdot\frac{v(s)-v(t^0)}{\lceil s-t^0\rfloor}.$$

的事实, 我们得到

$$\frac{v(s)-v(t^0)}{\lceil s-t^0\rfloor}\geqslant\frac{v(s)}{\lceil s\rfloor}=\alpha(s,v). \tag{8.9}$$

由 v 满足 IAMR (分别用 t^0, s, $\lceil s-t^0\rfloor$, $\lceil t^1-s\rfloor$ 取代 s^1, s^2, ε_1, ε_2), 得到

$$\frac{v(t^1)-v(s)}{\lceil t^1-s\rfloor}\geqslant\frac{v(s)-v(t^0)}{\lceil s-t^0\rfloor}. \tag{8.10}$$

现在, 由 (8.9) 式和 (8.10) 式有

$$\frac{v(t^1)-v(s)}{\lceil t^1-s\rfloor}\geqslant\frac{v(s)}{\lceil s\rfloor}=\alpha(s,v). \tag{8.11}$$

然后, 由 (8.11) 式得

$$\begin{aligned}\alpha(t^1,v)=\frac{v(t^1)}{\lceil t^1\rfloor}&=\frac{\lceil t^1-s\rfloor}{\lceil t^1\rfloor}\cdot\frac{v(t^1)-v(s)}{\lceil t^1-s\rfloor}+\frac{\lceil s\rfloor}{\lceil t^1\rfloor}\frac{v(s)}{\lceil s\rfloor}\\&\geqslant\frac{\lceil t^1-s\rfloor}{\lceil t^1\rfloor}\cdot\frac{v(s)}{\lceil s\rfloor}+\frac{\lceil s\rfloor}{\lceil t^1\rfloor}\cdot\frac{v(s)}{\lceil s\rfloor}=\frac{v(s)}{\lceil s\rfloor}=\alpha(s,v),\end{aligned}$$

因此, 可取 $t=t^1$.

由引理 8.21 知, 对每个 $s\in\mathcal{F}_0^N$, 存在 $\mathcal{F}_0^N$ 中的一个序列 $s^0,\cdots,s^k$, 其中 $s^0=s$ 以及 $k=\varphi(s)$, 使得对每个 $r\in\{0,\cdots,k-1\}$, 有 $\varphi(s^{r+1})=\varphi(s^r)-1$, $\operatorname{car}(s^{r+1})\subset\operatorname{car}(s^r)$, 以及 $\alpha(s^{r+1},v)\geqslant\alpha(s^r,v)$. 由于 $\varphi(s^k)=0$, s^k 对应于一个 crisp 联盟, 记为 T. 因此, 引理得证.

推论 8.22 令 $v\in\mathrm{CFG}^N$, 则对所有的 $s\in\mathcal{F}_0^N$, 存在 $T\in 2^N\backslash\{\varnothing\}$, 使得 $T\subset\operatorname{car}(s)$, 以及 $\alpha(e^T,v)\geqslant\alpha(s,v)$.

由推论 8.22 直接得到下面定理.

定理 8.23 令 $v\in\mathrm{CFG}^N$, 则

(i) $\sup\limits_{s\in\mathcal{F}_0^N}\alpha(s,v)=\max\limits_{T\in 2^N\backslash\{\varnothing\}}\alpha(e^T,v)$;

(ii) $T^*=\max\left(\arg\max\limits_{T\in 2^N\backslash\{\varnothing\}}\alpha(e^T,v)\right)$ 得到 $\arg\max\limits_{s\in\mathcal{F}_0^N}\alpha(s,v)$ 的最大元素, 即 e^{T^*}.

考虑到这个结果, 很容易修改 Dutta-Ray 算法使其适用于凸模糊博弈 v. 第一步, 令 $N_1:=N$, $v_1:=v$, 并且考虑 $\arg\max\limits_{s\in\mathcal{F}_0^{N_1}}\alpha(s,v_1)$. 根据定理 8.23, 存在唯一的 $\arg\max\limits_{s\in\mathcal{F}_0^{N_1}}\alpha(s,v_1)$ 中的最大元素, 它对应于一个 crisp 联盟, 记成 S_1. 对每个 $i\in S_1$, 定义 $E_i(v)=\alpha(e^{S_1},v_1)$. 如果 $S_1=N$, 则停止.

在 $S_1 \neq N$ 的情况下, 第二步, 在 $N_2 := N_1 \backslash S_1$ 上考虑凸模糊博弈 v_2, 其中对每个 $s \in [0,1]^{N \backslash S_1}$, 定义

$$v_2(s) = v_1\left(e^{S_1} \cap s\right) - v_1\left(e^{S_1}\right),$$

其中, $\left(e^{S_1} \cap s\right)$ 是 $[0,1]^N$ 中的元素, 满足

$$\left(e^{S_1} \cap s\right)_i = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i \in S_1, \\ s_i, & \text{如果 } i \in N \backslash S_1. \end{cases}$$

再一次通过使用定理 8.23, 可以取 $\underset{T \in 2^{N_2} \backslash \{\varnothing\}}{\arg\max}\ \alpha\left(e^S, v_2\right)$ 的最大元素 e^{S_2}, 并且对所有的 $i \in S_2$, 定义 $E_i(v) = \alpha\left(e^{S_2}, v_2\right)$. 如果 $S_1 \cup S_2 = N$, 则停止; 否则, 继续考虑凸模糊博弈 v_3, 依此类推. 在有限步后, 算法停止, 并且获得的分配 $E(v)$ 称为凸模糊博弈 v 的平等主义解.

定理 8.24 令 $v \in \mathrm{CFG}^N$, 则

(i) $E(v) = E(\mathrm{cr}(v))$;

(ii) $E(v) \in C(v)$;

(iii) $E(v)$ Lorenz 占优 Aubin 核心 $C(v)$ 中的其他所有分配.

证明 (i) 这个断言由定理 8.23 和上面给出的修改的 Dutta-Ray 算法可以直接得到.

(ii) 注意到 $E(v) = E(\mathrm{cr}(v)) \in C(\mathrm{cr}(v)) = C(v)$, 其中, 第一个等式来源于 (i), 第二个等式来源于定理 8.38 (iii), 并且关系 $E(\mathrm{cr}(v)) \in C(\mathrm{cr}(v))$ 是文献 [46] 中对凸 crisp 博弈的主要结果.

(iii) 考虑到 $E(\mathrm{cr}(v))$ Lorenz 占优 $C(\mathrm{cr}(v))$ 中的其他所有元素[46], 且由于 $E(v) = E(\mathrm{cr}(v))$, 以及 $C(\mathrm{cr}(v)) = C(v)$, 则断言 (iii) 成立.

定理 8.24 可以解释为 Dutta 和 Ray 的结果的加强. 同时可知, 凸 crisp 博弈的平等主义解在任何满足 IAMR 的模糊扩展中将保持 Lorenz 占优性.

凸模糊博弈的 Dutta-Ray 平等主义解也与凸模糊博弈的等分核心有关 (参见定义 7.17), 如定理 8.25 所示.

定理 8.25 令 $v \in \mathrm{CFG}^N$, 则

(i) $E(v) \in \mathrm{EDC}(v)$;

(ii) $\mathrm{EDC}(v) = \mathrm{EDC}(\mathrm{cr}(v))$.

证明 (i) 由命题 7.18 (ii) 和定理 8.24 (ii), 有 $E(v) \in C(v) \subseteq \mathrm{EDC}(v)$.

(ii) 由命题 7.18 (i) 得 $\mathrm{EDC}(v) \subset \mathrm{EDC}(\mathrm{cr}(v))$. 假定 $x \in \mathrm{EDC}(\mathrm{cr}(v))$, 下面要证明对每个 $s \in \mathcal{F}_0^N$, 存在 $i \in \mathrm{car}(s)$, 使得 $x_i \geqslant \alpha(s,v)$.

按照推论 8.22 中那样取 T. 由于 $x \in \mathrm{EDC}(\mathrm{cr}(v))$, 存在 $i \in T$ 满足 $x_i \geqslant \alpha\left(e^T, v\right)$. 现在, 由推论 8.22, 对于每个 $i \in T \subset \mathrm{car}(s)$, 有 $x_i \geqslant \alpha(s,v)$.

下一个例子用来说明凸模糊博弈的平等主义解、核心, 以及等分核心之间的关系, 正如定理 8.24 和定理 8.25 中叙述的.

例 8.26 令 $N=\{1,2,3\}$, $T=\{1,2\}$. 对每个 $s=\{s_1,s_2,s_3\}\in\mathcal{F}^{\{1,2,3\}}$, 考虑无异议博弈 u_{e^T}:

$$u_{e^T}(s)=\begin{cases}1, & \text{如果 } s_1=s_2=1,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

根据命题 8.4, 博弈 u_{e^T} 是凸的, 它的 Aubin 核心为

$$C(u_{e^T})=\mathrm{co}\left\{e^1,e^2\right\}=\mathrm{co}\left\{(1,0,0),(0,1,0)\right\},$$

并且平等主义解为

$$E(u_{e^T})=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\in C(u_{e^T}).$$

很容易看到, $E(u_{e^T})$ Lorenz 占优核心 $C(u_{e^T})$ 中的其他所有分配. 进一步, 等分核心 $\mathrm{EDC}(u_{e^T})$ 是集合 $B_1\cup B_2$, 其中 $B_1=\mathrm{co}\left\{e^1,\frac{1}{2}\left(e^1+e^2\right),\frac{1}{2}\left(e^1+e^3\right)\right\}$, $B_2=\mathrm{co}\left\{\frac{1}{2}\left(e^1+e^2\right),e^2,\frac{1}{2}\left(e^2+e^3\right)\right\}$. 注意, $C(u_{e^T})\subset\mathrm{EDC}(u_{e^T})=\mathrm{EDC}(\mathrm{cr}(u_{e^T}))$.

8.3 参与单调分配机制

在这一节, 我们介绍凸模糊博弈的参与单调分配机制 (participation monotonic allocation scheme, pamas) 的概念. 这个概念源于文献 [107] 所介绍的合作 crisp 博弈的人口单调分配机制 (population monotonic allocation schemes, pmas), 其中要求合作 crisp 博弈必须是完全均衡的 (参见 5.1.2 和 5.1.3 小节). 回忆一下, 对于 crisp 博弈, pmas 是一组核心元素, 每一个对应子博弈和博弈本身对应此组元素, 它们通过单调性条件保证每个参与者, 当其他参与者加入它的时候, 他们的境况会更好. 在我们的方法中[17], crisp 博弈的子博弈的角色将被一个模糊博弈 $v\in\mathrm{FG}^N$ 的 t-限制博弈 $v_t\in\mathrm{FG}^N$ 来取代 (参见定义 6.6).

注释 8.27 注意到, 对每个核心元素 $x\in C(v_t)$, 以及对每个 $i\notin\mathrm{car}(t)$ 有 $x_i=0$ 成立. 这由

$$0=v\left(e^{\varnothing}\right)=v_t\left(e^i\right)\leqslant x_i=\sum_{k\in N}x_k-\sum_{k\in N\backslash\{i\}}x_k\leqslant v_t\left(e^N\right)-v_t\left(e^{N\backslash\{i\}}\right)=0$$

得到, 其中, 第二个和最后一个等式用到了 $i\notin\mathrm{car}(t)$, 在两个不等式中, 都用到了 $x\in C(v_t)$.

注释 8.28 如果 $v\in\mathrm{CFG}^N$, 则对每个 $t\in\mathcal{F}^N$, 也有 $v_t\in\mathrm{CFG}^N$.

定义 8.29 令 $v \in \mathrm{FG}^N$, 机制 $(a_{i,t})_{i\in N, t\in \mathcal{F}_0^N}$ 称为**参与单调分配机制** (pamas), 如果

(i) 对每个 $t \in \mathcal{F}_0^N$, $(a_{i,t})_{i\in N} \in C(v_t)$ (稳定性条件);

(ii) 对任意满足 $s \leqslant t$ 的 $s, t \in \mathcal{F}_0^N$, 以及对每个 $i \in \mathrm{car}(s)$, 都有 $t_i^{-1} a_{i,t} \geqslant s_i^{-1} a_{i,s}$ 成立 (参与单调性条件).

注释 8.30 注意, 这样的 pamas 是一个 $n \times \infty$ 矩阵, 其中, 列对应于参与者, 行对应于模糊联盟. 在对应于 t 的每一行有一个博弈 v_t 的核心元素. 参与单调性条件蕴含, 在限制的模糊博弈中, 如果用这个机制来调整支付分配, 参与者在较大联盟中所获得的比在较小联盟中所获得的更多.

注释 8.31 注意, 模糊博弈 v 的参与单调分配机制的集合是一个 $n \times \infty$ 矩阵的凸集.

注释 8.32 受文献 [107] 启发, 文献 [120] 引入了模糊人口单调分配机制 (fuzzy population monotonic allocation scheme, FPMAS). 但未研究此机制和核心元素之间的关系.

注释 8.33 对博弈 v, pamas 存在的必要条件是对每个 $t \in \mathcal{F}_0^N$, v_t 都存在核心元素. 但是, 例 8.34 显示, 这不是充分条件. 充分条件是博弈 v 的凸性, 如定理 8.36 所述.

例 8.34 考虑博弈 $v \in \mathrm{FG}^N$, 其中 $N = \{1,2,3,4\}$, 对每个 $s = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathcal{F}^N$, 都有 $v(s) = \min\{s_1 + s_2, s_3 + s_4\}$. 暂时假定 $(a_{i,t})_{i\in N, t\in \mathcal{F}_0^N}$ 是一个 pamas, 那么对 $t^1 = e^{N\backslash\{2\}}$, $t^2 = e^{N\backslash\{1\}}$, $t^3 = e^{N\backslash\{4\}}$, $t^4 = e^{N\backslash\{3\}}$, 有 $C(v_{t^k}) = \{e^k\}$, 因此对每个 $k \in N$ 有 $(a_{i,t^k})_{i\in N} = e^k$. 但是, $\sum\limits_{k\in N} a_{k,e^N} \geqslant \sum\limits_{k\in N} a_{k,t^k} = 4 > 2 = v(e^N)$, 这蕴含不存在 pamas. 注意, 对任何 $t = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{F}_0^N$ 都有 $C(v_t) \neq \varnothing$ 成立, 因为如果 $t_1 + t_2 \leqslant t_3 + t_4$ 时, $(t_1, t_2, 0, 0) \in C(v_t)$, 其他情况有 $(0, 0, t_3, t_4) \in C(v_t)$.

定义 8.35 令 $v \in \mathrm{FG}^N$, $x \in C(v)$, 称 x 是 pamas 扩展, 如果存在一个 pamas $(a_{i,t})_{i\in N, t\in \mathcal{F}_0^N}$, 使得对每个 $i \in N$, 都有 $a_{i,e^N} = x_i$.

下一个定理表明, 凸博弈有 pamas. 进一步, 每个核心元素是 pamas 扩展.

定理 8.36 令 $v \in \mathrm{CFG}^N$, $x \in C(v)$, 那么 x 是 pamas 扩展.

证明 由定理 8.38 知, x 是在边际向量 $m^\sigma(v)$ 的凸包中, 这里 $\sigma \in \pi(N)$. 考虑到注释 8.31, 只需证明每个边际向量 $m^\sigma(v)$ 是一个 pamas 扩展, 然后, 这些 pamas 扩展的适当的凸组合给出 x 的一个 pamas 扩展.

因此, 取 $\sigma \in \pi(N)$, 并且对每个 $i \in N$, $t \in \mathcal{F}_0^N$, 定义 $(a_{i,t})_{i\in N, t\in \mathcal{F}_0^N}$, 其中 $a_{i,t} = m_i^\sigma(v_t)$. 我们断言, 这个机制是 $m^\sigma(v)$ 的一个 pamas 扩展.

很显然, 因为 $v_{e^N} = v$, 对每个 $i \in N$, $a_{i,e^N} = m_i^\sigma(v)$. 进一步, 由注释 8.28, 每个 t-限制博弈 v_t 是一个凸模糊博弈, 并且由定理 8.38 有 $(a_{i,t})_{i\in N} \in C(v_t)$. 因此,

这个机制满足稳定性条件.

为了证明参与单调性条件, 取 $s,t \in \mathcal{F}_0^N$ 满足 $s \leqslant t$, $i \in \text{car}(s)$, 并且令 k 是 N 中的元素, 使得 $i = \sigma(k)$, 下面证明 $t_i^{-1}a_{i,t} \geqslant s_i^{-1}a_{i,s}$. 现在

$$\begin{aligned} t_i^{-1}a_{i,t} &= t_{\sigma(k)}^{-1}m_{\sigma(k)}^{\sigma}(v_t) = t_{\sigma(k)}^{-1}\left(v\left(\sum_{r=1}^{k}t_{\sigma(r)}e^{\sigma(r)}\right) - v\left(\sum_{r=1}^{k-1}t_{\sigma(r)}e^{\sigma(r)}\right)\right) \\ &\geqslant s_{\sigma(k)}^{-1}\left(v\left(\sum_{r=1}^{k}s_{\sigma(r)}e^{\sigma(r)}\right) - v\left(\sum_{r=1}^{k-1}s_{\sigma(r)}e^{\sigma(r)}\right)\right) = s_{\sigma(k)}^{-1}m_{\sigma(k)}^{\sigma}(v_s) = s_i^{-1}a_{i,s}, \end{aligned}$$

其中, 不等式来源于 v 的凸性 (即 v 满足 IAMR). 因此, $(a_{i,t})_{i\in N, t\in\mathcal{F}_0^N}$ 是 $m^{\sigma}(v)$ 的一个 pamas 扩展.

进一步, 博弈 $v \in \text{CFG}^N$ 的完全模糊 Shapley 值是一个 pamas, 这个值在对应于 t 的每一行上是具有限制博弈 v_t 的模糊 Shapley 值的机制 $(\varphi_{i,t})_{i\in N, t\in\mathcal{F}_0^N}$. 完全模糊 Shapley 值是 n 人模糊博弈类上的一个 Shapley 函数[120]. 要研究 Shapley 函数与 FPMAS 的关系, 建议读者参考文献 [120].

例 8.37 令 $v \in \text{FG}^{\{1,2\}}$ 满足对每个 $s = (s_1, s_2) \in \mathcal{F}^{\{1,2\}}$, 有 $v(s_1,s_2) = 4s_1(s_1-2) + 10(s_2)^2$. 那么 v 是凸的, 并且 $m^{(1,2)}(v) = m^{(2,1)}(v) = \phi(v) = (-4, 10)$, 因为事实上 v 是可加的: $v(s_1,s_2) = v(s_1,0) + v(0,s_2)$. 对每个 $t \in \mathcal{F}_0^N$, 模糊 Shapley 值 $\phi(v_t) = \left(4t_1(t_1-2), 10(t_2)^2\right)$, 且满足 $a_{1,t} = 4t_1(t_1-2)$ 和 $a_{2,t} = 10(t_2)^2$ 的机制 $(a_{i,t})_{i\in\{1,2\}, t\in\mathcal{F}_0^N}$ 是 $\phi(v)$ 的一个 pamas 扩展, 并且这个机制中的对应于 t 的每一行有 v_t 的模糊 Shapley 值, 因此 $(a_{i,t})_{i\in\{1,2\}, t\in\mathcal{F}_0^N}$ 是 v 的完全模糊 Shapley 值.

8.4 解概念的性质

这一节主要研究已介绍的凸模糊博弈类的解概念的特殊性质. 首先, 考虑 Aubin 核心、模糊 Shapley 值和模糊 Weber 集. 正如在下面的定理中将要看到的, 稳定边际向量性质 (参见定理 5.10 (iv)), 对于凸模糊博弈也是成立的, 并且模糊 Weber 集和 Aubin 核心是一致的. 因此, Aubin 核心是大核心; 此外, 它与对应的 crisp 博弈的核心是一致的[17].

定理 8.38 令 $v \in \text{CFG}^N$. 那么

(i) 对每个 $\sigma \in \pi(N)$, $m^{\sigma}(v) \in C(v)$;

(ii) $C(v) = W(v)$;

(iii) $C(v) = C(\text{cr}(v))$.

证明 对每个 $\sigma \in \pi(N)$ 有 $\sum_{i\in N} m_i^{\sigma}(v) = v(e^N)$, 而且, 对每个 $\sigma \in \pi(N)$ 和 $s \in \mathcal{F}^N$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in N} s_i m_i^{\sigma}(v) &= \sum_{k=1}^{n} s_{\sigma(k)} m_{\sigma(k)}^{\sigma}(v) = \sum_{k=1}^{n} s_{\sigma(k)}\left(v\left(\sum_{r=1}^{k} e^{\sigma(r)}\right) - v\left(\sum_{r=1}^{k-1} e^{\sigma(r)}\right)\right) \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n}\left(v\left(\sum_{r=1}^{k} s_{\sigma(r)} e^{\sigma(r)}\right) - v\left(\sum_{r=1}^{k-1} s_{\sigma(r)} e^{\sigma(r)}\right)\right) \\
&= v\left(\sum_{r=1}^{n} s_{\sigma(r)} e^{\sigma(r)}\right) = v(s),
\end{aligned}
$$

其中的不等式是用了 n 次命题 8.8. 因此, 对每个 $\sigma \in \pi(N)$, $m^{\sigma}(v) \in C(v)$.

(ii) 由断言 (i) 和核心的凸性, 得 $W(v) = \operatorname{co}\{m^{\sigma}(v) \mid \sigma \in \pi(N)\} \subset C(v)$, 逆包含关系由命题 7.29 得到.

(iii) 由命题 8.5 知 $\operatorname{cr}(v)$ 是一个凸 crisp 博弈, 故有 $C(\operatorname{cr}(v)) = W(\operatorname{cr}(v))$, 由 (ii), $W(\operatorname{cr}(v)) = W(v) = C(v)$.

由定理 8.38, 如果 v 是一个凸模糊博弈的话, $\phi(v)$ 在 Aubin 核心 $C(v)$ 中的一个中心位置. 对于 crisp 博弈, v 是凸的当且仅当 $C(v) = W(v)$ (参见定理 5.10 (v)). 对于模糊博弈, 这仅在一个方向上成立. 例 8.39 介绍了一个模糊博弈, 它不是凸的, 但其 Aubin 核心和模糊 Weber 集是一致的.

例 8.39 令 $v \in \mathrm{FG}^{\{1,2\}}$, 其中如果 $(s_1, s_2) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 则 $v(s_1, s_2) = s_1 s_2$, $v\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$. 那么 $v \notin \mathrm{CFG}^{\{1,2\}}$, 但是, $C(v) = W(v) = \operatorname{co}\{(0,1), (1,0)\}$.

例 8.40 考虑例 6.5 中的公共货物博弈. 如果函数 $g_1, \cdots, g_n$ 以及 $-k$ 是凸的, 那么有 $v \in \mathrm{CFG}^N$.

对于模糊博弈, 核心是超可加性解, 即对所有的 $v, w \in \mathrm{FG}^N$

$$
C(v+w) \supset C(v) + C(w),
$$

并且, 具有非空 Aubin 核心的模糊博弈形成一个圆锥体.

在凸模糊博弈的集合上, 能够证明 Aubin 核心是可加的, 如下命题.

命题 8.41 凸模糊博弈的 Aubin 核心和模糊 Shapley 值是可加解.

证明 令 v, w 是凸模糊博弈, 那么

$$
\begin{aligned}
C(v+w) &= C(\operatorname{cr}(v+w)) \\
&= C(\operatorname{cr}(v) + \operatorname{cr}(w)) = C(\operatorname{cr}(v)) + C(\operatorname{cr}(w)) \\
&= C(v) + C(w),
\end{aligned}
$$

其中第一个等式来源于定理 8.38 (iii), 第三个等式来源于凸 crisp 博弈的核心的可加性[25]. 此外, 由 $\phi(v) = \phi(\operatorname{cr}(v))$, 以及对于凸 crisp 博弈的 Shapley 值的可加性, 有 $\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w)$.

现在, 对凸模糊博弈, 我们研究其他核心和稳定集的性质[114].

引理 8.42　令 $v \in \mathrm{CFG}^N$. 取 $x, y \in I(v)$, 并且假定对某个 $s \in \mathcal{F}_0^N$, 有 $x \operatorname{dom}_s y$, 那么 $|\operatorname{car}(s)| \geqslant 2$.

证明　取 $x, y \in I(v)$, 并且假定对某个 $s \in \mathcal{F}_0^N$ 满足 $\operatorname{car}(s) = \{i\}$, 有 $x \operatorname{dom}_s y$. 那么 $x_i > y_i$, 以及 $s_i x_i \leqslant v(s_i e^i)$. 由 v 的凸性, 得到 $s_i v(e^i) \geqslant v(s_i e^i)$, 这样, 我们有 $y_i < x_i \leqslant \dfrac{v(s_i e^i)}{s_i} \leqslant v(e^i)$, 它与 y 的个体合理性矛盾.

定理 8.43　令 $v \in \mathrm{CFG}^N$, $w = \operatorname{cr}(v)$. 那么对所有 $x, y \in I(v) = I(w)$, 我们有在 v 上 $x \operatorname{dom} y$ 当且仅当在 w 上 $x \operatorname{dom} y$.

证明　首先, 注意到

$$I(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i \in N} x_i = v(e^N),\ \text{且对每个 } i \in N, x_i \geqslant v(e^i) \right\}$$

和

$$I(w) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i \in N} x_i = w(N),\ \text{且对每个 } i \in N, x_i \geqslant w(\{i\}) \right\}$$

是一致的, 因为 $w(N) = v(e^N)$, 以及对每个 $i \in N$, 有 $w(i) = v(e^i)$.

为了证明必要性, 令 $x, y \in I(v) = I(w)$, 以及对某些 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 有 $x \operatorname{dom}_S y$. 那么它蕴含在 v 上 $x \operatorname{dom}_{e^S} y$.

现在, 证明充分性. 令 $x, y \in I(v) = I(w)$, 以及对某些 $s \in \mathcal{F}_0^N$, 有 $x \operatorname{dom}_s y$. 令 $\varphi(s) = |\{i \in N | 0 < s_i < 1\}|$, 由注释 7.9, $\varphi(s) < n$. 我们仅需在 $\varphi(s) \in \{0, \cdots, n-1\}$ 上应用归纳法, 证明 $x \operatorname{dom}_s y$ 蕴含在 w 上 $x \operatorname{dom} y$.

明显地, 如果 $\varphi(s) = 0$, 那么 $x \operatorname{dom}_{\operatorname{car}(s)} y$, 因为 $\varphi(s) = 0$ 蕴含 s 是一个类 crisp 联盟.

现在假定, 断言 "在 $\varphi(s) = k$ 时, v 上的 $x \operatorname{dom} y$ 蕴含 w 上的 $x \operatorname{dom} y$" 对每个满足 $0 \leqslant k < r < n$ 的 k 成立. 取 $s \in \mathcal{F}_0^N$, 满足 $\varphi(s) = r$, 以及 $i \in N$ 满足 $0 < s_i < 1$, 并且取 $x, y \in I(v)$ 满足 $x \operatorname{dom}_s y$. 那么对每个 $i \in \operatorname{car}(s)$ 有 $x_i > y_i$, 以及 $s \cdot x \leqslant v(s)$. 进一步, 由引理 8.42, $|\operatorname{car}(s)| \geqslant 2$. 注意到, s 可以看成是 $a = s - s_i e^i$ 和 $b = s + (1 - s_i) e^i$ 的凸组合, 即 $s = (1 - s_i) a + s_i b$. 不难看出, $\varphi(a) = r - 1$, $\varphi(b) = r - 1$. 进一步, $|\operatorname{car}(a)| = |\operatorname{car}(s)| - 1$, $|\operatorname{car}(b)| = |\operatorname{car}(s)|$.

不等式 $s \cdot x \leqslant v(s)$ 蕴含 $(1 - s_i) a \cdot x + s_i b \cdot x \leqslant v(s)$. 另一方面, 由 v 的 (按分量) 凸性知 $v(s) \leqslant (1 - s_i) v(a) + s_i v(b)$.

因此, $(1 - s_i) a \cdot x + s_i b \cdot x \leqslant v(s) \leqslant (1 - s_i) v(a) + s_i v(b)$, 它蕴含着 $(1 - s_i)(a \cdot x - v(a)) + s_i (b \cdot x - v(b)) \leqslant 0$; 这样, $a \cdot x \leqslant v(a)$ 或者 $b \cdot x \leqslant v(b)$. 为了证明

$$x \operatorname{dom}_a y \quad \text{或者} \quad x \operatorname{dom}_b y, \tag{8.12}$$

考虑下面三种情况:

(1) $b\cdot x\leqslant v(b)$, 由于 $|\mathrm{car}(b)|\geqslant 2$, 那么 $x\,\mathrm{dom}_b\,y$;

(2) $b\cdot x>v(b)$ 并且 $|\mathrm{car}(s)|\geqslant 3$, 那么 $a\cdot x\leqslant v(a)$, 这样, 由于 $|\mathrm{car}(a)|\geqslant 2$, $x\,\mathrm{dom}_a\,y$;

(3) $b\cdot x>v(b)$ 并且 $|\mathrm{car}(s)|=2$, 那么 $a\cdot x\leqslant v(a)$, 以及 $|\mathrm{car}(a)|=1$.

由 v 的凸性和个体合理性, 得到 $a\cdot x\geqslant v(a)$. 事实上, 令 $a=s_je^j$, 那么由 v 的凸性知 $s_jv\left(e^j\right)\geqslant v\left(s_je^j\right)$, 由个体合理性, 得 $x_j\geqslant v\left(e^j\right)$, 因此, $a\cdot x=s_jx_j\geqslant s_jv\left(e^j\right)\geqslant v\left(s_je^j\right)=v(a)$. 因此 $a\cdot x=v(a)$, 这与 $(1-s_i)(a\cdot x-v(a))+s_i(b\cdot x-v(b))\leqslant 0$ 矛盾, 故情况 (3) 不出现.

因此, (8.12) 式成立. 由于 $\varphi(a)=\varphi(b)=r-1$, 归纳法假设蕴含在 w 上 $x\,\mathrm{dom}\,y$.

定理 8.44　令 $v\in\mathrm{CFG}^N$. 那么

(i) $C(v)=C^P(v)=C^{\mathrm{cr}}(v)$;

(ii) $\mathrm{DC}(v)=\mathrm{DC}(\mathrm{cr}(v))$;

(iii) $C(v)=\mathrm{DC}(v)$.

证明　(i) 对于凸模糊博弈, $C(v)=C(\mathrm{cr}(v))$ (参见定理 8.38 (iii)). 现在, 我们使用定理 7.12 (i) 得到结论.

(ii) 由定理 8.43, 得到 $\mathrm{DC}(v)=\mathrm{DC}(\mathrm{cr}(v))$.

(iii) 由于 $v\in\mathrm{CFG}^N$, 对每个 $s\in\mathcal{F}^N$, 有 $v\left(e^N\right)\geqslant v(s)+\sum\limits_{i\in N\backslash\mathrm{car}(s)}v\left(e^i\right)$. 由定理 7.13, 得到 $C^P(v)=\mathrm{DC}(v)$. 现在, 使用 (i) 得到结论.

下一个定理推广了文献 [104] 中关于每个 crisp 凸博弈具有唯一的稳定集且与优势核心一致的结论.

定理 8.45　令 $v\in\mathrm{CFG}^N$. 那么存在一个唯一的稳定集, 即 $\mathrm{DC}(v)$.

证明　由定理 2.12 (iii), $\mathrm{DC}(\mathrm{cr}(v))$ 是 $\mathrm{cr}(v)$ 的唯一的稳定集. 考虑定理 8.43, v 的稳定集和 $\mathrm{cr}(v)$ 的稳定集是一致的, 并且由定理 8.44 (ii), 有 $\mathrm{DC}(v)=\mathrm{DC}(\mathrm{cr}(v))$. 因此, v 的唯一的稳定集是 $\mathrm{DC}(v)$.

注意, 例 7.15 中的博弈 v 是凸的, 但 v_1 和 v_2 都不是.

注释 8.46　上面讨论的 Aubin 核心、proper 核心、crisp 核心、优势核心, 以及稳定集之间的关系仍然成立, 如果使用第 7.3 节描述的这些术语对应的推广形式 (详细内容可参考文献 [76] 的 Section 3).

现在, 我们在紧捕捉器结构以及第 7.5 和 7.6 节中介绍的妥协值上描述凸性的意义.

对每个 $k\in N$, 令 $D_kv(0)$ 和 $D_kv\left(e^N\right)$ 分别是在 0 和 e^N 处在方向 e^k 上的右和左偏导数.

定理 8.47　令 $v \in \mathrm{CFG}^N$, 则

$$\mathrm{HQ}(v) = \left[Dv(0), Dv\left(e^N\right)\right].$$

证明　由 v 满足 IAMR 的事实 (参见命题 8.8), 有

$$l_k(Q(v)) = \inf\left\{\varepsilon^{-1}\left(v\left(\varepsilon e^k\right) - v(0)\right) | \varepsilon \in (0,1]\right\} = D_k v(0),$$

以及

$$u_k(Q(v)) = \sup\left\{\varepsilon^{-1}\left(v\left(e^N\right) - v\left(e^N - \varepsilon e^k\right)\right) | \varepsilon \in (0,1]\right\} = D_k v\left(e^N\right).$$

定理 8.48　令 $v \in \mathrm{CFG}^N$. 则 $\mathrm{HC}(v) = \mathrm{HW}(v)$, 并且这个超立方体是 $C(v) = W(v)$ 的紧捕捉器. 进一步有, 对每个 $k \in N$,

$$l_k(C(v)) = v\left(e^k\right),$$

$$u_k(C(v)) = v\left(e^N\right) - v(e^{N\setminus\{k\}}).$$

证明　对 $v \in \mathrm{CFG}^N$, IAMR 性质蕴含, 对每个 $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\varepsilon^{-1}\left(v\left(\varepsilon e^k\right) - v(0)\right) \leqslant v\left(e^k\right) - v(0),$$

以及, 对每个 $S \subset N\setminus\{k\}$,

$$v\left(e^k\right) - v(0) \leqslant v\left(e^S + e^k\right) - v\left(e^S\right).$$

第一个不等式对应于 $s^1 = s^2 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, 以及 $\varepsilon_2 = 1$; 第二个不等式是由令 $s^1 = 0$, $s^2 = e^S$, 以及 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ 而获得的.

因此, 得到

$$\begin{aligned} l_k(C(v)) &= \sup\left\{\varepsilon^{-1} v\left(\varepsilon e^k\right) | \varepsilon \in (0,1]\right\} = v\left(e^k\right) \\ &= \min\{v(e^{S\cup\{k\}}) - v\left(e^S\right) | S \subset N\setminus\{k\}\} = l_k(W(v)). \end{aligned}$$

同样地, 由 IAMR 有

$$\begin{aligned} u_k(C(v)) &= \inf\left\{\varepsilon^{-1}\left(v\left(e^N\right) - v\left(e^N - \varepsilon e^k\right)\right) | \varepsilon \in (0,1]\right\} \\ &= v(e^N) - v(e^{N\setminus\{k\}}) = \max\{v(e^{S\cup\{k\}}) - v\left(e^S\right) | S \subset N\setminus\{k\}\} \\ &= u_k(W(v)). \end{aligned}$$

这蕴含 $\mathrm{HC}(v) = \mathrm{HW}(v)$.

这个超立方体是 $C(v) = W(v)$ 的紧捕捉器 (参见定理 8.38 (ii)), 来源于下列事实

$$l_k(W(v)) = v\left(e^k\right) = m_k^\sigma(v),$$

$$u_k(W(v)) = v\left(e^N\right) - v(e^{N\setminus\{k\}}) = m_k^\tau(v),$$

其中, σ 和 τ 分别是满足 $\sigma(1)=k$, $\tau(n)=k$ 的 N 的排序.

对于凸模糊博弈, 这个定理对 7.6 节介绍的一些妥协值也成立. 这可以由下面的定理给出.

定理 8.49 令 $v\in \mathrm{CFG}^N$. 那么

(i) 对每个 $k\in N$, $m_k^v(u(C(v)))=m_k^v(u(W(v)))=v\left(e^k\right)$;

(ii) $\mathrm{val}_C^\tau(v)=\mathrm{val}_C^\sigma(v)=\mathrm{val}_W^\tau(v)=\mathrm{val}_W^\sigma(v)$.

证明 (i) 由定理 8.48, 对每个 $k\in N$, 有 $u_k(C(v))=u_k(W(v))=v\left(e^N\right)-v\left(e^{N\backslash\{k\}}\right)$. 因此, 为证明 (i), 我们需要证明, 对 $k\in N$,

$$m_k^v(u(C(v)))=\sup\left\{s_k^{-1}\left(v(s)-\sum_{j\in N\backslash\{k\}}s_j(v(e^N)-v(e^{N\backslash\{j\}}))\right)\right\}=v\left(e^k\right),$$

其中的上确界是在 $s\in\mathcal{F}^N$ 和 $s_k>0$ 上计算的.

等价地, 下面要证明, 对每个 $s\in\mathcal{F}^N$ 和 $s_k>0$,

$$s_k v\left(e^k\right)\geqslant\sum_{j\in N\backslash\{k\}}s_j(v(e^N)-v(e^{N\backslash\{j\}})). \tag{8.13}$$

令 σ 是满足 $\sigma(1)=k$ 的 N 的排序, 那么

$$\begin{aligned}v(s)&=\sum_{t=1}^{n}\left(v\left(\sum_{r=1}^{t}s_{\sigma(r)}e^{\sigma(r)}\right)-v\left(\sum_{r=1}^{t-1}s_{\sigma(r)}e^{\sigma(r)}\right)\right)\\&=v\left(s_ke^k\right)+\sum_{t=2}^{n}\left(v\left(\sum_{r=1}^{t}s_{\sigma(r)}e^{\sigma(r)}\right)-v\left(\sum_{r=1}^{t-1}s_{\sigma(r)}e^{\sigma(r)}\right)\right).\end{aligned}$$

现在, 注意对每个 $t\in\{2,\cdots,n\}$, IAMR 蕴含

$$\begin{aligned}&s_{\sigma(t)}^{-1}\left(v\left(\sum_{r=1}^{t-1}s_{\sigma(r)}e^{\sigma(r)}+s_{\sigma(t)}e^{\sigma(t)}\right)-v\left(\sum_{r=1}^{t-1}s_{\sigma(r)}e^{\sigma(r)}\right)\right)\\&\leqslant v(e^{N\backslash\{\sigma(t)\}}+e^{\sigma(t)})-v(e^{N\backslash\{\sigma(t)\}}).\end{aligned}$$

因此, 得到

$$v(s)\leqslant s_kv\left(e^k\right)+\sum_{j\in N\backslash\{k\}}s_j(v(e^N)-v(e^{N\backslash\{j\}})).$$

由此, (8.13) 式成立.

(ii) 由 (i) 和定理 8.48, 由于对每个 $k\in N$, $l_k(C(v))=m_k^v(u(C(v)))=v\left(e^k\right)$ 成立, 故有, $\mathrm{val}_C^\tau(v)=\mathrm{val}_C^\sigma(v)=\mathrm{val}_W^\tau(v)=\mathrm{val}_W^\sigma(v)$.

注释 8.50　令 $v \in \mathrm{CFG}^N$, 因为 $u(Q(v)) \geqslant u(C(v))$, 由定理 8.49 (i) 的证明, 对每个 $k \in N$, 有 $m_k(u(Q(v))) = v(e^k)$. 但是通常, 这个剩余向量不等于 $Dv(0)$ (参见定理 8.47), 因此, 通常 $\mathrm{val}_Q^{\tau}(v)$ 和 $\mathrm{val}_Q^{\sigma}(v)$ 并不相等.

例 8.51　令 $v \in \mathrm{CFG}^{\{1,2\}}$. 对每个 $s = (s_1, s_2) \in \mathcal{F}^{\{1,2\}}$, 有 $v(s_1, s_2) = s_1 (s_2)^5$. 那么, 由定理 8.38 (ii) 和定理 8.48, $C(v) = W(v) = \mathrm{conv}\left\{m^{(1,2)}(v), m^{(2,1)}(v)\right\} = \{(0,1), (1,0)\}$, 以及 $\mathrm{HC}(v) = \mathrm{HW}(v) = [(0,0), (1,1)]$. 因此, $\mathrm{val}_C^{\sigma}(v) = \mathrm{val}_W^{\sigma}(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 另外, $\mathrm{val}_Q^{\sigma}(v) = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, 因为, 由定理 8.47, $\mathrm{HQ}(v) = [Dv(e^{\varnothing}), Dv(e^{\{1,2\}})] = [(0,0), (1,5)]$. 由定理 8.49, $\mathrm{val}_C^{\tau}(v) = \mathrm{val}_W^{\tau}(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathrm{val}_C^{\sigma}(v) = \mathrm{val}_W^{\sigma}(v)$. 进一步, $\mathrm{val}_Q^{\tau}(v)$ 是介于 $m^v(1,5) = (0,0)$ 和 $(1,5)$ 之间的妥协值, 因此, 在这种情况下也有 $\mathrm{val}_Q^{\tau}(v) = \mathrm{val}_Q^{\sigma}(v) = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$.

第 9 章　模糊宗族博弈

这一章考虑具有形式 $v:[0,1]^{N_1}\times\{0,1\}^{N_2}\to\mathbb{R}$ 的模糊博弈, 其中 N_1 中的参与者有在 0 和 1 之间变化的参与水平, 而 N_2 中的参与者是 crisp 参与者, 它们可以完全参与或者完全不参与合作. 用这种类型的博弈, 可以建立各种经济情况的模型, 其中包含的参与者群体被分成两个具有不同状态的子群体: 一个是 "宗族", 它包含 "有权势" 的参与者, 另一个是愿意与宗族合作的参与者集合. 当所有的宗族成员参加的时候, 这种合作对联盟产生一个正的收益. 在具有可转移效用合作博弈的传统理论里, 这种情况用 (完全) 宗族博弈来建立, 其中仅考虑非宗族成员与宗族完全合作和完全不合作 (参见第 5.3 节). 这里, 我们承袭这个简单假设, 并且允许非宗族成员与所有宗族成员合作, 一些其他非宗族成员在一定程度上合作. 最后, 引进了模糊宗族博弈的概念.

9.1　模糊宗族博弈的核心

令 $N=\{1,\cdots,n\}$ 是参与者的有限集合. 用 C 表示宗族成员的非空集合, 将宗族成员看做是 crisp 参与者. 接下来, 用 $\{0,1\}^C$ 表示 C 的 crisp 子联盟的集合, 用 $[0,1]^{N\backslash C}$(等价于 $\mathcal{F}^{N\backslash C}$) 表示 $N\backslash C$ 的模糊联盟的集合, 用 $\mathcal{F}_C^N$ 表示 $[0,1]^{N\backslash C}\times\{0,1\}^C$. 对每个 $s\in\mathcal{F}_C^N$, 用 $s_{N\backslash C}$ 和 s_C 分别表示将其限制到 $N\backslash C$ 和 C 上. 在下面, 用 1_C 表示向量 $\left(e^N\right)_C$. 进一步, 用 $\mathcal{F}_{1_C}^N$ 表示 N 上模糊联盟集合 $[0,1]^{N\backslash C}\times\{1_C\}$, 其中所有的宗族成员的参与水平为 1, 非宗族成员的参与水平可以在 0 和 1 之间变化[115].

我们用宗族成员的否决权、单调性, 以及反映下面这个事实的条件来定义模糊宗族博弈, 这个事实是, 在包含所有宗族成员以全部参与水平参与的增长联盟中, 一个非宗族成员参与水平的减小导致这个成员的平均边际回报也减少 (DAMR-property).

定义 9.1　博弈 $v:\mathcal{F}_C^N\to\mathbb{R}$ 是一个**模糊宗族博弈**, 如果 v 满足下面三个性质:

(i) (宗族成员的否决权) 如果 $s_C\neq 1_C$, 则 $v(s)=0$;

(ii) (单调性) 对所有满足 $s\leqslant t$ 的 $s,t\in\mathcal{F}_C^N$, 都有 $v(s)\leqslant v(t)$;

(iii) (非宗族成员的 DAMR 性质) 对每个 $i\in N\backslash C$, 所有的 $s^1,s^2\in\mathcal{F}_{1_C}^N$, 以及

所有的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, 使得 $s^1 \leqslant s^2$ 以及 $0 \leqslant s^1 - \varepsilon_1 e^i \leqslant s^2 - \varepsilon_2 e^i$, 都有

$$\varepsilon_1^{-1}\left(v\left(s^1\right) - v\left(s^1 - \varepsilon_1 e^i\right)\right) \geqslant \varepsilon_2^{-1}\left(v\left(s^2\right) - v\left(s^2 - \varepsilon_2 e^i\right)\right).$$

性质 (i) 表示, 所有宗族成员的完全参与对联盟产生一个正的收益是必要条件.

宗族仅有一个参与者的模糊宗族博弈称为模糊大老板博弈, 唯一的宗族成员就是大老板.

注释 9.2 可将模糊宗族博弈看做是一个特殊的混合作用集博弈, 混合作用集博弈由文献 [34] 引进.

作为简介, 我们给出两个不同情况的例子, 一个导致模糊宗族博弈, 另一个则不是.

例 9.3(具有拥有者和不同参与水平工人的生产情况) 令 $N\backslash C = \{1, \cdots, m\}$, $C = \{m+1, \cdots, n\}$. 令 $f : [0,1]^{N\backslash C} \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $f(0) = 0$ 的单调不减函数, 满足 DAMR 性质. 那么 $v : [0,1]^{N\backslash C} \times \{0,1\}^C \to \mathbb{R}$ 定义为: 如果 $s_C \neq 1_C$, 则 $v(s) = 0$, 否则 $v(s) = f(s_1, \cdots, s_m)$. v 是一个具有宗族 C 的模糊宗族博弈. 可以想象一个生产情况, 宗族成员提供不同的 (补充的) 生产所需的基本工具, 如果所有宗族成员与 $N\backslash C$ 中的工人合作, 则由生产函数度量收益[89], 其中每个工人 i 的参与水平是 s_i, 它可以从不参与变到完全参与.

例 9.4(具有固定的有否决权利的群体的模糊选举情况) 令 N 和 C 如例 9.3, $0 < k < |N\backslash C|$, 令 $v : [0,1]^{N\backslash C} \times \{0,1\}^C \to \mathbb{R}$ 满足

$$v(s) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } s_C = 1_C, \sum\limits_{i=1}^{m} s_i \geqslant k, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

那么, v 对于 C 中成员有否决权性质、单调性, 但 $N\backslash C$ 中成员不具有 DAMR 性质, 因此, 它不是一个模糊宗族博弈. 这个博弈可以看成一个否决情况, 为了终止一个提议, 必须 C 中成员 (完全) 同意, 并且, $N\backslash C$ 的支持水平的和 $\sum\limits_{i \in N\backslash C} s_i$ 应该超过一个固定的阈值 k, 其中, $s_i = 1$ $(s_i = 0)$ 对应于完全支持 (不支持) 这个提议, 但是也考虑部分支持.

下面, 具有固定非空参与者集 N 且具有固定宗族 C 的所有模糊宗族博弈的集合用 FCG_C^N 表示. 注意, FCG_C^N 是 FG^N 的凸锥, 即对所有的 $v, w \in \mathrm{FCG}_C^N$ 及 $p, q \in \mathbb{R}_+$, 有 $pv + qw \in \mathrm{FCG}_C^N$, 其中 $\mathbb{R}_+$ 表示非负实数集合.

现在证明, 对每个 $v \in \mathrm{FCG}_C^N$, 如果 $|C| \geqslant 2$, 对应的 crisp 博弈 $w = \mathrm{cr}(v)$ 是完全宗族博弈, 并且如果 $|C| = 1$, 则是完全大老板博弈.

令 $v \in \mathrm{FCG}_C^N$, 对应的 crisp 博弈 w 具有下列性质, 这些性质可以直接从 v 的性质得到:

- 如果 $C \not\subset S$, 则 $w(S) = 0$;
- 对满足 $S \subset T \subset N$ 的所有 S, T, 有 $w(S) \leqslant w(T)$;
- 对满足 $C \subset S \subset T$ 的所有 S, T, 以及对每个 $i \in S \backslash C$, 有 $w(S) - w(S \backslash \{i\}) \geqslant w(T) - w(T \backslash \{i\})$.

因此, 按文献 [122] 中的术语, 如果 $|C| \geqslant 2$, w 是一个完全宗族博弈 (参见第 5.3.2 节), 按文献 [27] 中的术语, 如果 $|C| = 1$, w 是一个完全大老板博弈.

模糊宗族博弈可以看成是 crisp 宗族博弈的推广, 我们关心的是非宗族成员参与合作的可能性. 特别地, 在一个模糊宗族博弈中, 每个非宗族成员可以以从 0 到 1 的程度参与合作, 然而, 在一个 crisp 宗族博弈中, 一个非宗族成员仅仅可以有两种情况: 或者是作为成员在包含所有宗族成员的 (crisp) 联盟, 或者不是包含所有宗族成员的 (crisp) 联盟中的成员.

接下来, 考虑对应于一个模糊宗族博弈的 t-限制博弈, 并且在命题 9.5 中证明, 这些博弈也是模糊宗族博弈.

令 $v \in \mathrm{FCG}_C^N$, $t \in \mathcal{F}_{1_C}^N$. 对每个 $s \in \mathcal{F}_C^N$, 回忆 v 的关于 t 的 t-限制博弈 v_t 定义为 $v_t(s) = v(t * s)$.

命题 9.5 令 v_t 是 $v \in \mathrm{FCG}_C^N$ 的 t-限制博弈, 其中 $t \in \mathcal{F}_{1_C}^N$, 那么 $v_t \in \mathrm{FCG}_C^N$.

证明 首先, 注意对每个具有 $s_C \neq 1_C$ 的 $s \in \mathcal{F}_C^N$, 有 $(t * s)_C \neq 1_C$, 因此 v 的否决权性质蕴含 $v_t(s) = v(t * s) = 0$. 为了证明单调性, 令 $s^1, s^2 \in \mathcal{F}_C^N$ 满足 $s^1 \leqslant s^2$. 那么 $v_t(s^1) = v(t * s^1) \leqslant v(t * s^2) = v_t(s^2)$, 其中的不等式来源于 v 的单调性. 现在, 考虑关于非宗族成员的 DAMR 性. 令 $i \in N \backslash C$, $s^1, s^2 \in \mathcal{F}_{1_C}^N$, 并令 $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, 使得 $s^1 \leqslant s^2$, 以及 $0 \leqslant s^1 - \varepsilon_1 e^i \leqslant s^2 - \varepsilon_2 e^i$ 成立, 那么

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_2^{-1}\left(v_t\left(s^2\right) - v_t\left(s^2 - \varepsilon_2 e^i\right)\right) = \varepsilon_2^{-1}\left(v\left(t * s^2\right) - v\left(t * s^2 - t_i \varepsilon_2 e^i\right)\right) \\
\leqslant &\varepsilon_1^{-1}\left(v\left(t * s^1\right) - v\left(t * s^1 - t_i \varepsilon_1 e^i\right)\right) = \varepsilon_1^{-1}\left(v_t\left(s^1\right) - v_t\left(s^1 - \varepsilon_1 e^i\right)\right),
\end{aligned}$$

其中的不等式来源于 v 满足 DAMR 性的事实.

对每个 $i \in N \backslash C$, $x \in [0,1]$ 以及 $t \in \mathcal{F}_C^N$, 令 $(t^{-i} \| x)$ 是 $\mathcal{F}_C^N$ 中的元素, 满足对每个 $j \in N \backslash \{i\}$, 有 $(t^{-i} \| x)_j = t_j$, 并且 $(t^{-i} \| x)_i = x$. 如果对每个 $i \in N \backslash C$, 函数 $g_{t^{-i}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是凹函数, 其中对每个 $x \in [0,1]$ 有 $g_{t^{-i}}(x) = v(t^{-i} \| x)$, 则称函数 $v : [0,1]^{N \backslash C} \times \{0,1\}^C \to \mathbb{R}$ 是关于非宗族成员按分量凹的. 直观上, 这意味着函数 v 对每个对应于非宗族成员 (的参与水平) 的分量, 当其他分量都保持固定时, 它是凹的.

函数 $v : [0,1]^{N \backslash C} \times \{0,1\}^C \to \mathbb{R}$ 称为在 $[0,1]^{N \backslash C}$ 上有次模性, 如果对所有的 $s, t \in \mathcal{F}_{1_C}^N$, 有 $v(s \vee t) + v(s \wedge t) \leqslant v(s) + v(t)$, 其中 $s \vee t$ 和 $s \wedge t$ 是 $[0,1]^{N \backslash C} \times \{1_C\}$ 上的元素, 对每个 $i \in N \backslash C$, 它的第 i 个分量分别等于 $\max\{s_i, t_i\}$ 和 $\min\{s_i, t_i\}$.

注释 9.6　非宗族成员的 DAMR 性蕴含 v 的两个重要性质, 即按分量凹性和次模性. 注意, 按分量凹性直接来源于 v 的 DAMR 性. 次模性的证明遵循定理 8.9 中的证明, 其中证明了 IAMR 性蕴含次模性.

令 $\varepsilon > 0$, $s \in \mathcal{F}_C^N$. 对于每个 $i \in N \backslash C$, 如果 $s_i > 0$, 用 $D_i v(s)$ 表示 v 在 s 处的对第 i 个分量的左导数, 如果 $s_i = 0$, 则表示右导数, 即

$$D_i v(s) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \varepsilon^{-1} \left(v(s) - v\left(s - \varepsilon e^i\right)\right), & \text{如果 } s_i > 0, \\ \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \varepsilon^{-1} \left(v\left(s + \varepsilon e^i\right) - v(s)\right), & \text{如果 } s_i = 0. \end{cases}$$

众所周知, 对于凹实值函数, 图像的切线都位于图像的上方, 基于这个性质有下面引理.

引理 9.7　令 $v \in \mathrm{FCG}_C^N$, $t \in \mathcal{F}_{1_C}^N$, 以及 $i \in N \backslash C$. 那么对每个 $s_i \in [0, t_i]$, $v\left(t^{-i} \| t_i\right) - v\left(t^{-i} \| s_i\right) \geqslant (t_i - s_i) D_i v(t)$.

证明　由于 v 的按分量凹性和 g_{-i} 的图像在 $(t_i, g_{-i}(t_i))$ 处的切线性质, 可得 $v\left(t^{-i} \| t_i\right) - (t_i - s_i) D_i v(t) \geqslant v\left(t^{-i} \| s_i\right)$.

9.2　模糊宗族博弈的核心和稳定集

下面给出模糊宗族博弈的 Aubin 核心的一个明确的解释, 并且给出它的几何形状的解释[114–115].

引理 9.8　令 $v \in \mathrm{FCG}_C^N$, $s \in \mathcal{F}_{1_C}^N$. 那么 $v\left(e^N\right) - v(s) \geqslant \sum\limits_{i \in N \backslash C} (1 - s_i) D_i v\left(e^N\right)$.

证明　假定 $|N \backslash C| = m$, 并且记 $N \backslash C = \{1, \cdots, m\}$, $C = \{m+1, \cdots, n\}$. 令 $a^0, \cdots, a^m$ 以及 $b^1, \cdots, b^m$ 是 N 上由下式给出的模糊联盟的序列, $a^0 = e^N$, 对每个 $r \in \{1, \cdots, m\}$, 有 $a^r = e^N - \sum\limits_{k=1}^{r} (1 - s_k) e^k$, $b^r = e^N - (1 - s_r) e^r$. 注意对每个 $r \in \{1, \cdots, m\}$, $a^m = s \in \mathcal{F}_{1_C}^N$, $a^{r-1} \vee b^r = e^N$, $a^{r-1} \wedge b^r = a^r$. 那么

$$v\left(e^N\right) - v(s) = \sum_{r=1}^{m} \left(v\left(a^{r-1}\right) - v\left(a^r\right)\right) \geqslant \sum_{r=1}^{m} \left(v\left(e^N\right) - v\left(b^r\right)\right), \tag{9.1}$$

其中不等式来源于, 对每个 $r \in \{1, \cdots, m\}$ 应用 v 的次模性. 现在, 对每个 $r \in \{1, \cdots, m\}$, 由引理 9.7, 有

$$D_r v\left(e^N\right) \leqslant (1 - s_r)^{-1} \left(v\left(e^N\right) - v\left(e^N - (1 - s_r) e^r\right)\right),$$

这样就得到

$$v\left(e^N\right) - v\left(b^r\right) = v\left(e^N\right) - v\left(e^N - (1 - s_r) e^r\right) \geqslant (1 - s_r) D_r v\left(e^N\right). \tag{9.2}$$

现在, 结合 (9.1) 式和 (9.2) 式得到引理的结论.

定理 9.9 令 $v \in \mathrm{FCG}_C^N$, 那么

(i) 如果 $|C|>1$, 则 $C(v)=\left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i = v\left(e^N\right),\text{对每个 } i \in N\backslash C, 0 \leqslant x_i \leqslant D_i v\left(e^N\right),\text{ 及对每个 } i \in C, 0 \leqslant x_i\right\}$;

(ii) 如果 $C=\{n\}$, 则 $C(v)=\left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i = v\left(e^N\right),\text{ 对每个 } i \in N\backslash\{n\}, 0 \leqslant x_i \leqslant D_i v\left(e^N\right), v\left(e^n\right) \leqslant x_n\right\}$

证明 我们仅证明 (i).

(a) 令 $x \in C(v)$, 那么对每个 $i \in N$, 有 $x_i = e^i \cdot x \geqslant v\left(e^i\right)=0$, 以及 $\sum_{i=1}^n x_i = v\left(e^N\right)$. 进一步, 对每个 $i \in N\backslash C$ 以及 $\varepsilon \in (0,1)$, 有

$$x_i=\varepsilon^{-1}\left(e^N \cdot x-\left(e^N-\varepsilon e^i\right) \cdot x\right) \leqslant \varepsilon^{-1}\left(v\left(e^N\right)-v\left(e^N-\varepsilon e^i\right)\right).$$

现在使用 v 的单调性和按分量凹性, 得到 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon>0}} \varepsilon^{-1}\left(v\left(e^N\right)-v\left(e^N-\varepsilon e^i\right)\right)$ 存在, 并且这个极限等于 $D_i v\left(e^N\right)$. 因此, $x_i \leqslant D_i v\left(e^N\right)$, 这蕴含 $C(v)$ 是 (i) 式右端集合的子集.

(b) 为了证明逆包含关系, 令 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $\sum_{i=1}^n x_i = v\left(e^N\right)$, 并对每个 $i \in N\backslash C$, 有 $0 \leqslant x_i \leqslant D_i v\left(e^N\right)$; 对每个 $i \in C$, $0 \leqslant x_i$. 要证明对每个 $s \in [0,1]^N$, 都有不等式 $s \cdot x \geqslant v(s)$ 成立. 首先, 如果 $s \in [0,1]^N$ 满足 $s_C \neq 1_C$, 那么 $v(s)=0 \leqslant s \cdot x$. 现在, 令 $s \in [0,1]^N$ 满足 $s_C = 1_C$, 那么

$$\begin{aligned} s \cdot x &= \sum_{i \in C} x_i + \sum_{i \in N\backslash C} s_i x_i = v\left(e^N\right) - \sum_{i \in N\backslash C} \left(1-s_i\right) x_i \\ &\geqslant v\left(e^N\right) - \sum_{i \in N\backslash C} \left(1-s_i\right) D_i v\left(e^N\right), \end{aligned}$$

由引理 9.8, 不等式 $s \cdot x \geqslant v(s)$ 成立.

模糊宗族博弈的 Aubin 核心有一个有趣的几何形状, 即它是一个单纯形和对应于非宗族成员的 “超频道” 的交. 更精确地, 对于模糊宗族博弈, 有

$$C(v)=\Delta\left(v\left(e^N\right)\right) \cap B_1(v) \cap \cdots \cap B_m(v),$$

其中, $\Delta\left(v\left(e^N\right)\right)$ 是单纯形 $\left\{x \in \mathbb{R}_+^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i = v\left(e^N\right)\right\}$, 对每个参与者 $i \in \{1, \cdots, m\}$,

$B_i(v)=\{x\in\mathbb{R}^n|0\leqslant x_i\leqslant D_iv(e^N)\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中介于两个平行超平面 $\{x\in\mathbb{R}^n|x_i=0\}$ 和 $\{x\in\mathbb{R}^n|x_i=D_iv(e^N)\}$ 之间的一个区域, 我们称之为对应于 i 的 "超频道". 一个有趣的核心元素是

$$b(v)=\left(\frac{D_1v(e^N)}{2},\cdots,\frac{D_mv(e^N)}{2},t,\cdots,t\right),$$

其中,

$$t=|C|^{-1}\left(v(e^N)-\sum_{i=1}^{m}\frac{D_iv(e^N)}{2}\right),$$

它对应于这个几何结构的中心点位置. 注意, $b(v)$ 是在所有 $i=1,\cdots,m$ 的 "超频道" $B_i(v)$ 的中央超平面的交内, 它有对应于宗族成员的分量都相等的性质.

例 9.10　给定一个 3 人模糊大老板博弈 v, 参与者 3 是大老板, 满足 $v(e^3)=0$, 它的 Aubin 核心有 (在转归集中的) 平行四边形形状, 顶点为: $(0,0,v(e^N))$, $(D_1v(e^N),0,v(e^N)-D_1v(e^N))$, $(0,D_2v(e^N),v(e^N)-D_2v(e^N))$, $(D_1v(e^N),D_2v(e^N),v(e^N)-D_1v(e^N)-D_2v(e^N))$. 注意

$$b(v)=\left(\frac{D_1v(e^N)}{2},\frac{D_2v(e^N)}{2},v(e^N)-\frac{D_1v(e^N)+D_2v(e^N)}{2}\right)$$

是这个平行四边形的几何中心.

对于 $v\in\mathrm{CFG}^N$, 有 $C(v)=C(\mathrm{cr}(v))$ (参见定理 8.38 (iii)). 下个例子说明对一般的模糊宗族博弈, 这个结果不成立.

例 9.11　令 $N=\{1,2\}$, $v:[0,1]\times\{0,1\}\to\mathbb{R}$ 由下式给出, 对每个 $s_1\in[0,1]$, $v(s_1,1)=\sqrt{s_1}$, $v(s_1,0)=0$, 并且令 $w=\mathrm{cr}(v)$. 那么 v 是以参与者 2 为大老板的模糊大老板博弈, 并且 $C(v)=\left\{(\alpha,1-\alpha)\middle|\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right\}$, $C(w)=\{(\alpha,1-\alpha)|\alpha\in[0,1]\}$. 因此, $C(v)\neq C(w)$.

下面的引理将在后面的内容中用到.

引理 9.12　令 $v\in\mathrm{FCG}_C^N$, $t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$, 以及 v_t 是 v 的 t-限制博弈. 那么, 对每个非宗族成员 $i\in\mathrm{car}(t)$, $D_iv_t(e^N)=t_iD_iv(t)$.

证明　我们有

$$\begin{aligned}D_iv_t(e^N)&=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{-1}\left(v_t(e^N)-v_t(e^N-\varepsilon e^i)\right)\\&=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{-1}\left(v(t)-v(t-\varepsilon t_ie^i)\right)=t_iD_iv(t).\end{aligned}$$

定理 9.13　令 $v\in\mathrm{FCG}_C^N$. 则对每个 $t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$, t-限制博弈 v_t 的 Aubin 核心 $C(v_t)$ 由下式描述:

(i) 如果 $|C|>1$, 则 $C(v_t)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|\sum_{i\in N}x_i=v(t),\text{ 对每个 } i\in N\backslash C, 0\leqslant x_i\leqslant t_iD_iv(t),\text{ 对每个 } i\in C, 0\leqslant x_i\right\}$;

(ii) 如果 $C=\{n\}$, 则 $C(v_t)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|\sum_{i\in N}x_i=v(t),\text{ 对每个 } i\in N\backslash\{n\}, 0\leqslant x_i\leqslant t_iD_iv(t), v(t_ne^n)\leqslant x_n\right\}$.

证明　我们仅证明 (i).

令 $t\in\mathcal{F}^N_{1_C}$, 满足 $|C|>1$. 那么, 由模糊博弈的 Aubin 核心的定义, $C(v_t)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|\sum_{i\in N}x_i=v_t(e^N),\text{ 对每个 } i\in\mathcal{F}^N_C,\sum_{i\in N}s_ix_i\geqslant v_t(s)\right\}$. 由于 $v_t(e^N)=v(t)$, 由命题 9.5, v_t 本身是模糊宗族博弈, 应用定理 9.9 (i) 得到, $C(v_t)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|\sum_{i\in N}x_i=v(t),\text{ 对每个 } i\in N\backslash C, 0\leqslant x_i\leqslant D_iv_t(e^N),\text{ 对每个 } i\in C, 0\leqslant x_i\right\}$. 现在, 应用引理 9.12, 就得到了要证的结论.

除了一般模糊博弈的不同核心和稳定集之间的关系外 (参见第 7.2 节), 我们还有模糊宗族博弈的优势核心和 proper 核心是一致的.

定理 9.14　令 $v\in\mathrm{FCG}^N_C$, 则 $\mathrm{DC}(v)=C^P(v)$.

证明　由否决权性质有, 如果 $|C|>1$, 则对每个 $i\in N$, $v(e^i)=0$. 那么 v 的单调性蕴含, 对每个 $s\in\mathcal{F}^N$, $v(e^N)-\sum_{i\in N\backslash\mathrm{car}(s)}v(e^i)-v(s)=v(e^N)-v(s)\geqslant 0$. 可以很容易检验当 $|C|=1$ 时, 对每个 $s\in\mathcal{F}^N$, $v(e^N)-\sum_{i\in N\backslash\mathrm{car}(s)}v(e^i)-v(s)\geqslant 0$. 因此由定理 7.12 (ii) 得等式 $\mathrm{DC}(v)=C^P(v)$.

现在给出模糊宗族博弈 v 的两个例子, 分别是 $\mathrm{DC}(v)\neq C(v)$ 以及 $\mathrm{DC}(v)$ 不是稳定集的情况.

例 9.15　令 $N=\{1,2\}$, $v:[0,1]\times\{0,1\}\to\mathbb{R}$ 由下式给出, 对每个 $s_1\in[0,1]$, $v(s_1,1)=\sqrt{s_1}$, $v(s_1,0)=0$. 这是一个参与者 2 为大老板的模糊大老板博弈, 因此 $C(v)\neq\varnothing$. 进一步, 正如例 7.16 那样, 我们得到 $C(v)=\left\{x\in I(v)\middle|0\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{2}\right\}$, $\mathrm{DC}(v)=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+|x_1+x_2=1\right\}$, 因此 $\mathrm{DC}(v)\neq C(v)$. 注意, $I(v)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+|x_1+x_2=1\}$ 是唯一的稳定集.

下个例子显示, $\mathrm{DC}(v)$ 可以是稳定集的真子集.

例 9.16　令 $N=\{1,2,3\}$, v 定义为对所有的 $(s_1,s_2)\in[0,1]^2$, $v(s_1,s_2,0)=0$, $v(s_1,s_2,1)=\min\{s_1+s_2,1\}$, 那么 $\mathrm{DC}(v)=\{(0,0,1)\}$, 并且没有 $I(v)$ 中的元素被 $(0,0,1)$ 占优. 因此, $\mathrm{DC}(v)$ 不是稳定集. 集合 $K^{a,b}=\{(\varepsilon a,\varepsilon b,1-\varepsilon)\,|0\leqslant\varepsilon\leqslant 1\}$, 当 $a,b\in\mathbb{R}_+$ 满足 $a+b=1$ 时, 是 v 的稳定集.

9.3　双单调参与分配规则

这一节介绍完全宗族博弈的双单调分配机制 (bi-monotonic allocation scheme, bi-mas) 的模糊推广 (参见第 5.3.2 节). 我们称对应的机制为双单调参与分配机制 (bi-monotonic participation allocation scheme, bi-pamas), 并且借助于现在介绍的补偿–分享规则来研究这种机制[115].

令 $N\backslash C=\{1,\cdots,m\}$, $C=\{m+1,\cdots,n\}$. 对于 $\alpha\in[0,1]^m$ 和 $\beta\in\Delta(C)=\Delta(\{m+1,\ \cdots,n\})=\left\{z\in\mathbb{R}_+^{n-m},\ \sum\limits_{i=m+1}^{n} z_i=1\right\}$, 引进一个分配规则 $\psi^{\alpha,\beta}:\mathrm{FCG}_C^N\to\mathbb{R}^n$, 对每个 $v\in\mathrm{FCG}_C^N$, 它的第 i 个分量 $\psi_i^{\alpha,\beta}(v)$ 由下式定义

$$\psi_i^{\alpha,\beta}(v)=\begin{cases}\alpha_i D_i v\left(e^N\right), & \text{如果 } i\in\{1,\cdots,m\},\\ \beta_i\left(v\left(e^N\right)-\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k D_k v\left(e^N\right)\right), & \text{如果 } i\in\{m+1,\cdots,n\}.\end{cases}$$

我们称这个规则为具有补偿向量 α 和分享向量 β 的补偿–分享规则. 补偿向量 α 的第 i 个分量 α_i 表示, 参与者 $i\in\{1,\cdots,m\}$ 只获得他对 e^N 的边际贡献 $D_i v\left(e^N\right)$ 的 $\alpha_i D_i v\left(e^N\right)$ 部分. 而对每个 $i\in\{m+1,\cdots,n\}$, 分享向量 β 的第 i 个分量 β_i 决定了宗族成员 i 所得的份额

$$\beta_i\left(v\left(e^N\right)-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k D_k v\left(e^N\right)\right).$$

定理 9.17　令 $v\in\mathrm{FCG}_C^N$, 那么

(i) 对每个 $\alpha\in[0,1]^m$ 和 $\beta\in\Delta(C)$, $\psi^{\alpha,\beta}:\mathrm{FCG}_C^N\to\mathbb{R}^n$ 是稳定的 (也就是说, 对每个 $v\in\mathrm{FCG}_C^N$, $\psi^{\alpha,\beta}(v)\in C(v)$), 可加的;

(ii) $C(v)=\{\psi^{\alpha,\beta}(v)\,|\alpha\in[0,1]^{N\backslash C},\beta\in\Delta(C)\}$;

(iii) 赋予每个 $v\in\mathrm{FCG}_C^N$ 一个 $\mathbb{R}^n$ 的子集 $C(v)$ 上的多元函数 $C:\mathrm{FCG}_C^N\to\!\!\to\mathbb{R}^n$ 是可加的.

证明　(i) 对所有的 $v,w\in\mathrm{FCG}_C^N$, 以及所有的 $p,q\in\mathbb{R}_+$, $\psi^{\alpha,\beta}(pv+qw)=p\psi^{\alpha,\beta}(v)+q\psi^{\alpha,\beta}(w)$. 因此, $\psi^{\alpha,\beta}$ 在模糊宗族博弈的圆锥体上是可加的. 由定理 9.9 可得稳定性成立.

(ii) 显然, 对每个 $\psi^{\alpha,\beta}(v)$ 都有 $\psi^{\alpha,\beta}(v) \in C(v)$. 反之, 令 $x \in C(v)$, 那么按照定理 9.9, 对每个 $i \in N\backslash C$, $x_i \in \left[0, D_i v\left(e^N\right)\right]$, 因此, 对每个 $i \in \{1, \cdots, m\}$, 存在 $\alpha_i \in [0,1]$, 使得 $x_i = \alpha_i D_i v\left(e^N\right)$. 现在证明

$$v\left(e^N\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_i v\left(e^N\right) \geqslant 0. \tag{9.3}$$

注意到, $e^C \in \mathcal{F}_{1_C}^N$ 是模糊联盟, 其中每个非宗族成员的参与水平为 0, 每个宗族成员的参与水平为 1. 我们有

$$\begin{aligned} v\left(e^N\right) - v\left(e^C\right) &= \sum_{i=1}^{m}\left(v\left(\sum_{k=1}^{i} e^k + e^C\right) - v\left(\sum_{k=1}^{i-1} e^k + e^C\right)\right) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{m}\left(v\left(e^N\right) - v\left(e^N - e^i\right)\right) \geqslant \sum_{i=1}^{m} D_i v\left(e^N\right) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i D_i v\left(e^N\right), \end{aligned}$$

其中第一个不等式, 通过取 $s^1 = \sum_{k=1}^{i} e^k + e^C$, $s^2 = e^N$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, 由 v 的 DAMR 性质所得. 第二个不等式, 通过取 $t = e^N$ 和 $s_i = 1$, 由引理 9.7 得到. 第三个不等式是由 $D_i v\left(e^N\right) \geqslant 0$ 和 v 的单调性得到. 因此, (9.3) 式成立.

不等式 (9.3) 表示如下事实: 宗族成员群体在大联盟中剩余一个非负量 (给非宗族成员).

对每个 $i \in C$, $x_i \geqslant v\left(e^i\right)$ 的事实蕴含, 对每个 $i \in \{m+1, \cdots, n\}$ 有 $x_i \geqslant 0$. 但是, 这表明存在一个向量 $\beta \in \Delta(C)$, 使得

$$x_i = \beta_i \left(v\left(e^N\right) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k D_k v\left(e^N\right)\right),$$

$\left(\text{如果 } v\left(e^N\right) - \sum_{i=1}^{m} D_k v\left(e^N\right) = 0\right.$, 任取 $\beta \in \Delta(C)$; 否则对任何的 $i \in C$, 取 $\beta_i = \left. x_i \left(v\left(e^N\right) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_k D_k v\left(e^N\right)\right)^{-1}\right)$. 因此, $x = \psi^{\alpha,\beta}(v)$.

(iii) 显然, 对所有的 $v, w \in \mathrm{FCG}_C^N$, $C(v+w) \supset C(v) + C(w)$. 反过来, 令 $v, w \in \mathrm{FCG}_C^N$, 那么

$$\begin{aligned} C(v+w) &= \left\{\psi^{\alpha,\beta}(v+w) \,|\, \alpha \in [0,1]^{N\backslash C}, \beta \in \Delta(C)\right\} \\ &= \left\{\psi^{\alpha,\beta}(v) + \psi^{\alpha,\beta}(w) \,|\, \alpha \in [0,1]^{N\backslash C}, \beta \in \Delta(C)\right\} \\ &\subset \left\{\psi^{\alpha,\beta}(v) \,|\, \alpha \in [0,1]^{N\backslash C}, \beta \in \Delta(C)\right\} \end{aligned}$$

$$+\left\{\psi^{\alpha,\beta}(w)\,|\alpha\in[0,1]^{N\backslash C},\beta\in\Delta(C)\right\}$$
$$=C(v)+C(w),$$

其中等式由 (ii) 得到.

对于模糊宗族博弈, 我们现在引进的双单调参与分配机制与凸模糊博弈中的 pamas (参见第 8.3 节) 的作用相似.

定义 9.18 令 $v\in \mathrm{FCG}_C^N$. 一个机制 $(b_{i,t})_{i\in N,t\in\mathcal{F}_{1_C}^N}$ 称为对 v 的**双单调参与分配机制** (bi-pamas), 如果下列条件满足

(i) (稳定性) 对每个 $t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$, 有 $(b_{i,t})_{i\in N}\in C(v_t)$;

(ii) (关于参与水平的双单调性) 对所有满足 $s\leqslant t$ 的 $s,t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$, 有

(ii.1) 对每个 $i\in(N\backslash C)\cap\mathrm{car}(s)$, 有 $s_i^{-1}b_{i,s}\geqslant t_i^{-1}b_{i,t}$,

(ii.2) 对每个 $i\in C$, 有 $b_{i,s}\leqslant b_{i,t}$.

注释 9.19 将 $(b_{i,t})_{i\in N,t\in\mathcal{F}_{1_C}^N}$ 限制到 crisp 环境下 (其中仅考虑 crisp 联盟) 则是一个双单调分配机制, 在第 5.3.2 节中研究过.

引理 9.20 设 $v\in\mathrm{FCG}_C^N$. 令 $s,t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$ 满足 $s\leqslant t$, $i\in\mathrm{car}(s)$ 是一个非宗族成员, 那么 $D_iv(s)\geqslant D_iv(t)$.

证明 我们有

$$D_iv(s)=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{-1}\left(v(s)-v\left(s-\varepsilon e^i\right)\right)\geqslant\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{-1}\left(v(t)-v\left(t-\varepsilon e^i\right)\right)=D_iv(t),$$

其中的不等式通过取 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$, 由 v 的 DAMR 性质获得.

定理 9.21 令 $v\in\mathrm{FCG}_C^N$, $N\backslash C=\{1,\cdots,m\}$. 那么对每个 $\alpha\in[0,1]^m$ 和 $\beta\in\Delta(C)=\ \ \Delta(\{m+1,\cdots,n\})$, 补偿–分享规则 $\psi^{\alpha,\beta}$ 产生一个 bi-pamas, 即 $(\psi_i^{\alpha,\beta}(v_t))_{i\in N,t\in\mathcal{F}_{1_C}^N}$.

证明 我们仅证明 $|C|>1$ 的情况. 定理 9.13 (i) 已证明, 对每个 $t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$, t-限制博弈 v_t 的 Aubin 核心 $C(v_t)$ 由下式给出,

$$C(v_t)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\left|\sum_{i\in N}x_i=v(t),\text{对每个}i\in N\backslash C,0\leqslant x_i\leqslant t_iD_iv(t),\text{对每个}i\in C,0\leqslant x_i\right.\right\}.$$

那么, 对每个非宗族成员 i, t-限制博弈 v_t 的 “大联盟” t 的基于 α 的补偿 (不考虑 β) 是 $\psi_i^{\alpha,\beta}=\alpha_it_iD_iv(t)$, $i\in\{1,\cdots,m\}$. 因此, $\psi_i^{\alpha,\beta}=\beta_i\left(v(t)-\sum_{i=1}^m\alpha_it_iD_iv(t)\right)$ 对每个 $i\in\{m+1,\cdots,n\}$ 都成立.

接下来, 证明对每个非宗族成员 i, 当包含具有完全参与水平的所有宗族成员以及其中参与者 i 是活跃的 (即 $s_i>0$) 的联盟变大的时候, 参与水平的每单位补偿是弱递减的.

令 $s,t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$ 满足 $s\leqslant t$, 以及 $i\in\operatorname{car}(s)\cap(N\backslash C)$, 有

$$\begin{aligned}\psi_i^{\alpha,\beta}(v_s)&=\alpha_i D_i v_s\left(e^N\right)=\alpha_i s_i D_i(v_s)\\&\geqslant\alpha_i s_i D_i(v_t)=\alpha_i s_i(t_i)^{-1}D_i v_t\left(e^N\right)=s_i(t_i)^{-1}\psi_i^{\alpha,\beta}(v_t),\end{aligned}$$

其中不等式来源于引理 9.20, 第二和第三个等式来源于引理 9.12. 因此. 对任何满足 $s\leqslant t$ 的 $s,t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$, 以及每个非宗族成员 $i\in\operatorname{car}(s)$, 有

$$s_i^{-1}\psi_i^{\alpha,\beta}(v_s)\geqslant t_i^{-1}\psi_i^{\alpha,\beta}(v_t).$$

现在, 将基于 α 的 t-限制博弈 v_t 的宗族成员在 "大联盟" t 中的剩余记为 $R_\alpha(v_t)$. 形式上,

$$R_\alpha(v_t)=v_t\left(e^N\right)-\sum_{i\in N\backslash C}\alpha_i D_i v_t\left(e^N\right)=v(t)-\sum_{i\in N\backslash C}\alpha_i D_i v(t).$$

首先证明, 对任何满足 $s\leqslant t$ 的 $s,t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$,

$$R_\alpha(v_t)\geqslant R_\alpha(v_s).\tag{9.4}$$

不等式 (9.4) 表明: 宗族成员的剩余在更大的联盟中是 (当非宗族成员增加他们的参与水平的时候) 弱变大的.

令 $s,t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$ 满足 $s\leqslant t$, 那么

$$\begin{aligned}v(t)-v(s)&=\sum_{k=1}^m\left(v\left(s+\sum_{i=1}^k(t_i-s_i)e^i\right)-v\left(s+\sum_{i=1}^{k-1}(t_i-s_i)e^i\right)\right)\\&\geqslant\sum_{k=1}^m(t_k-s_k)D_k v\left(s+\sum_{i=1}^k(t_i-s_i)e^i\right)\\&\geqslant\sum_{k=1}^m(t_k-s_k)D_k v(t)\geqslant\sum_{k=1}^m(t_k-s_k)\alpha_k D_k v(t),\end{aligned}$$

其中第一个不等式来源于引理 9.7, 第二个不等式来源于引理 9.20. 这蕴含

$$\begin{aligned}v(t)-\sum_{k=1}^m t_k\alpha_k D_k v(t)&\geqslant v(s)-\sum_{k=1}^m s_k\alpha_k D_k v(t)\\&\geqslant v(s)-\sum_{k=1}^m s_k\alpha_k D_k v(s),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式来源于引理 9.20. 因此, 我们证明了对所有满足 $s\leqslant t$ 的 $s,t\in\mathcal{F}_{1_C}^N$,

$$R_\alpha(v_t)\geqslant R_\alpha(v_s).$$

现在注意到, 不等式 (9.4) 蕴含, 对每个宗族成员, 在 v_t 中的 (对整个宗族成员群体的剩余的) 个体份额, 即 $\beta_i R_\alpha(v_t)$, 当非宗族成员增加他们的参与水平的时候, 是弱递增的.

定义 9.22　令 $v \in \mathrm{FCG}_C^N$, $x \in C(v)$. 称 x 是 **bi-pamas 扩展**, 如果存在一个 bi-pamas $(b_{i,t})_{i\in N, t\in \mathcal{F}_{1_C}^N}$, 使得对每个 $i \in N$, 有 $b_{i,e^N} = x_i$.

下面的定理证明, 模糊宗族博弈的每个核心元素都是 bi-pamas 扩展.

定理 9.23　令 $v \in \mathrm{FCG}_C^N$, $x \in C(v)$. 则 x 是 bi-pamas 扩展.

证明　令 $x \in C(v)$, 那么根据定理 9.17 (ii), x 具有形式 $\psi^{\alpha,\beta}(v_{e^N})$. 现在取 $(\psi_i^{\alpha,\beta}(v_t))_{i\in N, t\in \mathcal{F}_{1_C}^N}$, 由定理 9.21 知, 它是一个 bi-pamas.

第三部分　多选择博弈

在一个多选择博弈中, 当参与者与其他参与者合作时, 有有限数量的参与活动水平. 粗略地讲, 合作 crisp 博弈可以看成是多选择博弈, 其中每个参与者仅有两个活动水平：完全参与和完全不参与.

多选择博弈是在文献 [60] 和 [61] 引进的, 在文献 [23], [24], [28], [33], [32], [40], [53], [54], [65], [81], [82] 和 [88] 中广泛地研究过. 这一部分基本上是沿着文献 [23], [24], [28] 和 [82] 的研究介绍的.

本书的第三部分是这样组织的：第 10 章包含多选择博弈的基本概念和术语. 第 11 章介绍了多选择博弈的解概念, 其灵感来源于 crisp 博弈的传统解概念. 第 12 章介绍了均衡多选择博弈、凸多选择博弈和多选择宗族博弈, 并且研究了这些类上博弈的解概念的特殊性质.

第10章 预备知识

令 N 是参与者的非空有限集合, 通常的形式是 $\{1,\cdots,n\}$. 在一个多选择博弈中, 每个参与者 $i\in N$ 具有有限数量的活动水平, 在这样的活动水平上, 他可以选择博弈. 特别地, 任何两个参与者可以有不同数量的活动水平. 参与者群体得到的奖励依赖于合作参与者的努力. 此时, 可以假定每个参与者 $i\in N$ 具有 m_i+1 个活动水平, 在每个活动水平上他可以参与博弈, 其中 $m_i\in\mathbb{N}$. 令 $M_i:=\{0,\cdots,m_i\}$ 作为参与者 i 的活动空间, 其中活动水平为 0 意味着不参与博弈. $\mathcal{M}^N:=\prod\limits_{i\in N}M_i$ 的元素称为 (多选择) 联盟. 联盟 $m=(m_1,\cdots,m_n)$ 起大联盟作用. 空联盟 $(0,\cdots,0)$ 也用 0 表示. 为了进一步使用, 引进符号 $M_i^+:=M_i\backslash\{0\}$ 和 $\mathcal{M}_+^N:=\mathcal{M}^N\backslash\{(0,\cdots,0)\}$. 对 $s\in\mathcal{M}^N$, 用 (s_{-i},k) 表示参与状态, 其中除去参与者 i 的所有参与者在由 s 定义的水平上博弈, 而参与者 i 在水平 $k\in M_i$ 上博弈. 一个特殊情况是 $(0_{-i},k)$, 其中仅有参与者 i 是活动的 (在水平 k 上). 对 $s\in\mathcal{M}^N$, 定义 s 的载体为 $\mathrm{car}(s)=\{i\in N|s_i>0\}$. 令 $u\in\mathcal{M}_+^N$, 用 $\mathcal{M}_u^N$ 表示 $\mathcal{M}^N$ 的子集, 它由 $s\leqslant u$ 的多选择联盟组成. 对于 $t\in\mathcal{M}_+^N$, 我们也需要记号 $M_i^t=\{1,\cdots,t_i\}$, 其中 $i\in N$, $\mathcal{M}_t^N=\prod\limits_{i\in N}M_i^t$. 特征函数 $v:\mathcal{M}^N\to\mathbb{R}$, 满足 $v(0,\cdots,0)=0$, 对每个联盟 $s=(s_1,\cdots,s_n)\in\mathcal{M}^N$, 给一个价值, 这个价值是当每个参与者 i 在水平 $s_i\in M_i$ 获得的.

定义 10.1 **多选择博弈**是一个三元组 (N,m,v), 其中 N 是参与者集合, $m\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^N$ 是一个向量, 它描述所有参与者活动水平的数目, $v:\mathcal{M}^N\to\mathbb{R}$ 是特征函数.

在不至于引起混淆的情况下, 常用 v 表示 (N,m,v). 用 $\mathrm{MC}^{N,m}$ 表示具有参与者集合 N 和活动水平向量 m 的多选择博弈的集合.

例 10.2 考虑一个大的建筑项目, 这个项目有最后期限, 如果超过最后期限每天有处罚. 很明显, 完成的时间依靠项目中所有成员的努力：他们付出的努力越多项目完成地越快. 这个情况产生一个多选择博弈. 当每个工人在一定活动水平工作时, 联盟的价值被定义为负处罚值, 这个处罚值是, 当每个参与者按相应的努力工作时, 到项目的完成日期时应赔付的值.

例 10.3 假定一个大公司有很多部门, 公司的利润依赖于每个部门的表现. 这产生一个多选择博弈, 其中参与者是部门, 当每个部门在一定水平上发挥功能时, 联盟的价值就是公司获得的相应利润.

多选择博弈也可以看成是对花费分配情况建模的一个适当的分析工具, 在其中货物是不可分的商品, 它们仅在一定的有限个水平上是可用的.

定义 10.4 博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 称为是**简单的**, 如果对所有的 $s \in \mathcal{M}^N$, 有 $v(s) \in \{0,1\}$ 且 $v(m)=1$.

定义 10.5 博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 称为是 **0-规范化的** (zero-normalized), 如果没有任何参与者当其独立工作时可获得收益, 也就是说, 对所有的 $i \in N$ 和 $j \in M_i$ 都有 $v\left(je^i\right)=0$.

定义 10.6 博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 称为是**可加的**, 如果每个联盟 s 的收益等于联盟 s 中每个参与者都以 s 中同样的工作水平单独工作时收益的总和, 也就是说, 对所有的 $s \in \mathcal{M}^N$, 有 $v(s)=\sum\limits_{i \in N} v\left(s_i e^i\right)$.

在很多多选择博弈的经济应用中, v 的特征函数是超可加的, 因此, 对参与者而言, 形成大联盟 m 是有效的.

定义 10.7 博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 称为是**超可加的**, 如果对所有满足 $s \wedge t=0$ 的 $s,t \in \mathcal{M}^N$, 都有 $v(s \vee t) \geqslant v(s)+v(t)$ 成立, 其中对所有的 $i \in N$, $(s \wedge t)_i := \min\{s_i, t_i\}$, $(s \vee t)_i := \max\{s_i, t_i\}$.

定义 10.8 对于一个博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, v 的 **0-规范化** (zero-normalization) 是博弈 v_0, 它是从 v 中减去可加博弈 a 而获得, 其中 a 满足, 对所有的 $i \in N$ 和 $j \in M_i^+$ 都有 $a\left(je^i\right) := v\left(je^i\right)$.

定义 10.9 博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 称为是 **0-单调的**, 如果它的 0-规范化是单调的, 即如果对所有满足 $s \leqslant t$ 的 $s,t \in \mathcal{M}^N$, $v_0(s) \leqslant v_0(t)$.

定义 10.10 博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的基于 $u \in \mathcal{M}_+^N$ 的**子博弈** v_u 定义为, 对每个 $s \in \mathcal{M}_u^N$, 有 $v_u(s) := v(s)$.

定义 10.11 博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的基于 $u \in \mathcal{M}_u^N$ 的**边际博弈** (或 v 的 u-边际博弈) v^{-u} 定义为, 对每个 $s \in \mathcal{M}_{m-u}^N$, 有 $v^{-u}(s) := v(s+u)-v(u)$.

在多选择博弈中, 与 crisp 无异议博弈相似的概念是最小努力博弈.

定义 10.12 基于 $s \in \mathcal{M}_+^N$ 的**最小努力博弈** $u_s \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 定义为, 对所有的 $t \in \mathcal{M}^N$,

$$u_s(t) := \begin{cases} 1, & \text{对所有 } i \in N, t_i \geqslant s_i, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

对相同向量空间中的两个集合 A 和 B, 令 $A+B=\{x+y | x \in A, y \in B\}$. 为了方便, 空集之和记成 0.

令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 定义 $M := \{(i,j) | i \in N, j \in M_i\}$ 和 $M^+ := \left\{(i,j) | i \in N, j \in M_i^+\right\}$. 对于博弈 v, (水平) 支付向量是一个函数 $x: M \to \mathbb{R}$, 其中对所有的 $i \in N$ 和 $j \in M_i^+$, x_{ij} 表示在支付中对参与者 i, 对应于这个参与者的活动水平从 $j-1$ 变化

到 j 的增量, 并且对所有的 $i \in N$, $x_{i0} = 0$.

令 x 和 y 是博弈 v 的两个支付向量. 称 x 比 y 弱小, 如果对每个 $s \in \mathcal{M}^N$,

$$X(s) := \sum_{i \in N} X_{is_i} = \sum_{i \in N} \sum_{k=0}^{s_i} x_{ik} \leqslant \sum_{i \in N} \sum_{k=0}^{s_i} y_{ik} = \sum_{i \in N} Y_{is_i} =: Y(s).$$

注意, 这不蕴含对所有的 $i \in N$ 和 $j \in M_i$, 有 $x_{ij} \leqslant y_{ij}$. 下个例子说明的就是这一点. 在例子中为了简化符号, 用亏损矩阵 $[a_{ij}]$, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, \max\{m_1, \cdots, m_n\}$ 来表示支付向量 $x : M \to \mathbb{R}$. 在这个矩阵中, 如果 $i \in N$, $j \in M_i^+$, 则 $a_{ij} := x_{ij}$; 如果 $i \in N$, $j > m_i$, 则 a_{ij} 就被忽视掉了 (用 * 表示).

例 10.13　令一个多选择博弈由下面给出, $N = \{1, 2\}$, $m = (2, 1)$, 并且 $v((1,0)) = v((0,1)) = 1$, $v((2,0)) = 2$, $v((1,1)) = 3$, $v((2,1)) = 5$. 考虑由下面定义的两个支付向量 x 和 y

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & * \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & * \end{bmatrix}.$$

由于 $X((1,0)) \leqslant Y((1,0))$, $X((1,1)) \leqslant Y((1,1))$, 以及对所有其他的 s, $X(s) \leqslant Y(s)$, 那么 x 比 y 弱小. 原因是, 按照这两个支付向量, 参与者 1 在他的第二个水平上得到 3; 同时对于参与者 1, 按照 y, 在他的第一个水平上得到 2; 而按照 x, 在第一个水平上参与者 1 仅得到 1.

另一个方法, 我们可以把一个博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的支付向量描述为一个 $\left(\sum_{i \in N} m_i\right)$ 维向量, 它的分量由对应于 M^+ 中的元素赋值, 其中前 m_1 个分量表示参与者 1 的对应于 m_1 个不同参与水平的支付, 接下来的 m_2 个分量表示参与者 2 的对应于 m_2 个不同参与水平的支付, 其余类推.

最后, 介绍在博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 中, 对大联盟 m 的参与者的边际贡献的其他表示.

定义 10.14　对每个参与者 $i \in N$, 在 v 中 i 对 m 的边际贡献是 $w_i(m, v) = v(m) - v(m_{-i}, 0)$. 对每个 $i \in N$, $j \in \{1, \cdots, m_i - 1\}$, 在博弈 v 中, 水平高于 j 的参与者 i 的对大联盟 m 的边际贡献是 $w_{ij^+}(m, v) = v(m) - v(m_{-i}, j)$; $w_{i0^+}(m, v) = w_i(m, v)$. 对每个 $i \in N$ 和 $j \in M_i^+$, i 对联盟 (m_{-i}, j) 的边际贡献是 $w_{ij}(m, v) = v(m_{-i}, j) - v(m_{-i}, j-1)$.

注意, 对每个 $i \in N$, 在 v 中参与者 i 对 m 的边际贡献 $w_i(m, v)$ 等于 i 对联盟 m 的个体水平 $j \in M_i^+$ 的边际贡献 $w_{ij}(m, v)$ 的和, 即

$$w_i(m, v) = \sum_{j=1}^{m_i} w_{ij}(m, v).$$

第 11 章　多选择博弈的解概念

这一章介绍从合作 crisp 博弈到多选择博弈的解概念的推广. 特别关注如转归、核心、稳定集, 以及多选择博弈的基于边际向量的解概念. 并简单介绍了最近在博弈论文献中介绍的类-Shapley 值.

11.1　转归、核心和稳定集

令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$. 支付向量 $x: M \to \mathbb{R}$ 称为是**有效的**, 如果 $X(m) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} = v(m)$; 称它是**水平增加合理的** (level-increase rational), 如果对所有的 $i \in N$ 和 $j \in M_i^+$, x_{ij} 至少是这样的增量: 参与者 i 独自工作, 且他的活动水平从 $j-1$ 变到 j 时所获得的收益, 即 $x_{ij} \geqslant v\left(je^i\right) - v\left((j-1)\,e^i\right)$. 注意, 对于 (水平) 支付向量, 水平增加合理性类似于合作 crisp 博弈的支付向量的个体合理性 (参见定义 1.27 (i)).

定义 11.1　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 支付向量 $x: M \to \mathbb{R}$ 是 v 的一个**转归**, 如果它是有效的并且水平增加合理的.

博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的转归的集合用 $I(v)$ 表示, 很容易得到

$$I(v) \neq \varnothing \Leftrightarrow \sum_{i \in N} v\left(m_i e^i\right) \leqslant v(m). \tag{11.1}$$

定义 11.2　博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的**核心** $C(v)$ 由所有满足下列条件的 $x \in I(v)$ 组成, 对所有的 $s \in \mathcal{M}^N$ 有 $X(s) \geqslant v(s)$ 成立.

下列与核心有关系的概念, 是对传统合作博弈核心的直接推广, 在文献 [54] 中有所介绍.

定义 11.3　博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的**预核心** $\mathcal{PC}(v)$ 定义为

$$\mathcal{PC}(v) = \left\{x: M \to \mathbb{R} | X(m) = v(m),\ \text{对所有的}\ s \in \mathcal{M}^N, X(s) \geqslant v(s)\right\}.$$

注释 11.4　博弈 v 的预核心 $\mathcal{PC}(v)$ 是一个包含集合 $C(v)$ 的具有无限个方向的凸多面体. 注意, 预核心分配不一定是转归.

令 $s \in \mathcal{M}_+^N$, $x, y \in I(v)$. 转归 y 通过 s 占优转归 x, 记为 $y \,\mathrm{dom}_s\, x$, 如果有 $Y(s) \leqslant v(s)$, 并且对所有的 $i \in \mathrm{car}(s)$, $Y_{is_i} > X_{is_i}$. 称转归 y 占优转归 x, 如果存在 $s \in \mathcal{M}_+^N$, 使得 $y \,\mathrm{dom}_s\, x$.

定义 11.5　博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的**优势核心** $\mathrm{DC}(v)$ 是由所有 $x \in I(v)$ 组成, 其中不存在 y 使得 y 占优 x 的.

定理 11.6, 定理 11.8 和定理 11.9, 讨论多选择博弈的核心和优势核心之间的关系.

定理 11.6　对每个博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 有 $C(v) \subset \mathrm{DC}(v)$.

证明　令 $x \in C(v)$, 并且假定 $y \in I(v)$, $s \in \mathcal{M}_{+}^{N}$, 使得 $y \operatorname{dom}_s x$, 那么

$$v(s) \geqslant Y(s) = \sum_{i \in N} Y_{is_i} > \sum_{i \in N} X_{is_i} = X(s) \geqslant v(s),$$

很明显得出矛盾. 因此, x 不被占优.

令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 是一个 0-规范化博弈 (参见定义 10.8), x 是 v 的支付向量, 那么水平增加合理性条件归结为条件 $x \geqslant 0$. 对于一个可加博弈 a, 有 $C(a) = \mathrm{DC}(a) = I(a) = \{x\}$, 其中 $x: M \to \mathbb{R}$ 是一个对所有的 $i \in N$ 和 $j \in \mathcal{M}_i^{+}$, 有 $x_{ij} := a\left(je^i\right) - a\left((j-1)\,e^i\right)$ 的支付向量. 现在我们有

命题 11.7　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 并且 v_0 是 v 的 0-规范化. 令 x 是 v 的支付向量. $y: M \to \mathbb{R}$ 定义为对所有的 $i \in N$ 和 $j \in \mathcal{M}_i^{+}$, $y_{ij} := x_{ij} - v\left(je^i\right) + v\left((j-1)\,e^i\right)$. 那么有

(i) $x \in I(v) \Leftrightarrow y \in I\left(v_0\right)$;

(ii) $x \in C(v) \Leftrightarrow y \in C\left(v_0\right)$;

(iii) $x \in \mathrm{DC}(v) \Leftrightarrow y \in \mathrm{DC}\left(v_0\right)$

这个命题的证明作为练习留给读者.

定理 11.8　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 满足 $\mathrm{DC}(v) \neq \varnothing$. 那么 $C(v) = \mathrm{DC}(v)$ 当且仅当 v 的 0-规范化博弈 v_0 满足对所有的 $s \in \mathcal{M}^N$ 有 $v_0(s) \leqslant v_0(m)$.

证明　由命题 11.7, 我们只需对 0-规范化博弈证明这个定理. 因此, 假设 v 是 0-规范化的, 进一步, 假设 $C(v) = \mathrm{DC}(v)$, 并且令 $x \in C(v)$, 那么, 对所有 $s \in \mathcal{M}^N$

$$v(m) = X(m) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij} + \sum_{i \in N} \sum_{j=s_i+1}^{m_i} x_{ij} \geqslant v(s).$$

现在假定对所有的 $s \in \mathcal{M}^N$, 有 $v(s) \leqslant v(m)$. 由于 $C(v) \subset \mathrm{DC}(v)$ (参见定理 11.6), 故只需证明对所有的 $x \in I(v) \backslash C(v)$, 有 $x \notin \mathrm{DC}(v)$. 令 $x \in I(v) \backslash C(v)$ 和 $s \in \mathcal{M}_{+}^{N}$, 使得 $X(s) < v(s)$. 定义 $y: M^{+} \to \mathbb{R}$ 如下

$$y_{ij} := \begin{cases} x_{ij} + \dfrac{v(s) - X(s)}{\sum\limits_{k \in N} s_k}, & \text{如果 } i \in N, j \in \{1, \cdots, s_i\}, \\ \dfrac{v(m) - v(s)}{\sum\limits_{k \in N} (m_k - s_k)}, & \text{如果 } i \in N, j \in \{s_i + 1, \cdots, m_i\}. \end{cases}$$

由 y 的定义很容易得到 y 是有效的. 由于 $x \geqslant 0$, $v(s) > X(s)$ 以及 $v(m) \geqslant v(s)$, 故有 $y \geqslant 0$. 因此, y 也是水平增加合理的, 得到结论 $y \in I(v)$.

对 $i \in N$ 和 $j \in \{1, \cdots, s_i\}$, 有 $y_{ij} > x_{ij}$, 因此对所有的 $i \in N$, $Y_{is_i} > X_{is_i}$. 由这个结论和以下事实

$$Y(s) = X(s) + \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{v(s) - X(s)}{\sum\limits_{k \in N} s_k} = v(s)$$

得 $y \operatorname{dom}_s x$, 因此 $x \notin \mathrm{DC}(v)$.

由定理 11.6 和定理 11.8, 可以容易证明定理 11.9. 注意, 这个定理对合作 crisp 博弈也是成立的, 因为多选择博弈类包含合作 crisp 博弈类.

定理 11.9 令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 满足 $C(v) \neq \varnothing$. 那么 $C(v) = \mathrm{DC}(v)$.

证明 我们只需证明定理对 0-规范化博弈是成立的 (参见命题 11.7). 因此, 假定 v 是 0-规范化的. 由定理 11.8 中证明的第一部分知, 对所有的 $s \in \mathcal{M}^N$, $C(v) \neq \varnothing$ 蕴含 $v(s) \leqslant v(m)$. 因为 $C(v) \subset \mathrm{DC}(v)$ (参见定理 11.6), 故 $\mathrm{DC}(v) \neq \varnothing$. 现在, 定理 11.8 直接蕴含 $C(v) = \mathrm{DC}(v)$.

考虑定理 11.9, 有问题: 是否存在核心与优势核心不相等的博弈. 例 11.10 给出了这个问题的答案, 它提供了一个多选择博弈, 核心为空但优势核心非空.

例 11.10 令多选择博弈由下面给出, $N = \{1, 2\}$, $m = (2, 1)$, 并且 $v((1,0)) = v((0,1)) = 0$, $v((2,0)) = \dfrac{1}{4}$, $v((1,1)) = v((2,1)) = 1$. 转归 x 应满足下列的等式和不等式:

$$x_{11} + x_{12} + x_{21} = 1, \quad x_{11} \geqslant 0, x_{21} \geqslant 0, x_{12} \geqslant \frac{1}{4}.$$

因此, 得到

$$I(v) = \mathrm{co}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\}.$$

注意到, 对于这个博弈, 一个转归仅仅可以通过联盟 $(1,1)$ 占优另一个转归, 并且, 由于对所有的 $x \in I(v)$, $x_{11} + x_{21} \leqslant \dfrac{3}{4}$, 故得

$$\mathrm{DC}(v) = \mathrm{co}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\}.$$

最后, 没有优势核心的元素 x 满足 $x_{11} + x_{21} \geqslant v((1,1))$. 由 $C(v) \subset \mathrm{DC}(v)$ 可以得到 $C(v) = \varnothing$. 注意, 对于 v 的 0-规范化博弈 v_0, 有 $v_0((1,1)) = 1 > \dfrac{3}{4} = v_0((2,1))$.

读者可去寻找一个合作 crisp 博弈的例子, 要求核心不等于优势核心 (具有三个参与者的博弈就足够了).

对于例 11.10 中的博弈, 核心和优势核心都是凸集, 在一般情况下也是成立的, 如下面定理所述.

定理 11.11　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 那么, 下面两个断言成立:

(i) $C(v)$ 是凸的;

(ii) $\mathrm{DC}(v)$ 是凸的.

证明　省略 (i) 的证明. 为了证明 (ii), 只要证明如果 v 是 0-规范化的, 则 $\mathrm{DC}(v)$ 是凸的就足够了. 因此, 假定 v 是 0-规范化的. 显然, 如果 $\mathrm{DC}(v)=\varnothing$, 则它是凸的. 现在假定 $\mathrm{DC}(v)\neq\varnothing$. 定义一个博弈 $w \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 满足对所有的 $s \in \mathcal{M}^N$, $w(s) := \min\{v(s), v(m)\}$. 易知

$$w(m) = v(m). \tag{11.2}$$

下面证明 $\mathrm{DC}(v)=\mathrm{DC}(w)=C(w)$. 由于 $\mathrm{DC}(v)\neq\varnothing$, 故 $I(v)\neq\varnothing$. 由于 v 是 0-规范化的, 这蕴含 $v(m)\geqslant 0$ (参见 (11.1) 式), 以及对所有的 $i\in N$, $j \in M_i$ 有

$$w\left(je^i\right) = \min\left\{v\left(je^i\right), v(m)\right\} = 0. \tag{11.3}$$

由 (11.2) 式和 (11.3) 式, 得 $I(w)=I(v)$.

现在, 令 $s \in \mathcal{M}_+^N$ 以及 $x, y \in I(v) = I(w)$. 由 $w(s) \leqslant v(s)$ 知, 如果在 w 中 $x\,\mathrm{dom}_s\,y$, 则在 v 中 $x\,\mathrm{dom}_s\,y$. 另一方面, 如果在 v 中 $x\,\mathrm{dom}_s\,y$, 那么 $X(s)\leqslant v(s)$, 以及

$$X(s) = \sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} - \sum_{i\in N}\sum_{j=s_i+1}^{m_i} x_{ij} \leqslant v(m).$$

因此 $X(s)\leqslant w(s)$, 并且在 w 中 $x\,\mathrm{dom}_s\,y$.

我们得到结论

$$\mathrm{DC}(w) = \mathrm{DC}(v), \tag{11.4}$$

这蕴含 $\mathrm{DC}(w)\neq\varnothing$. 由于 w 是 0-规范化的 (参见 (11.3) 式) 以及

$$w(s) := \min\{v(s), v(m)\} \leqslant v(m) = w(m),$$

由定理 11.8,

$$C(w) = \mathrm{DC}(w). \tag{11.5}$$

因此, 由 (11.4) 式, (11.5) 式以及本定理的 (i), 直接蕴含 $\mathrm{DC}(v)$ 是凸的.

多选择博弈的基于占优概念的其他支付向量的集合在文献 [81] 中引入, 如下所示.

令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, $2^{I(v)} := \{A | A \subset I(v)\}$. 介绍两个映射, $D: 2^{I(v)} \to 2^{I(v)}$ 和 $U: 2^{I(v)} \to 2^{I(v)}$, 使得对所有的 $A \subset I(v)$,

$$D(A) := \{x \in I(v) | \text{ 存在 } a \in A \text{ 使得 } a \text{ 占优 } x\};$$

$$U(A) := I(v) \backslash D(A).$$

集合 $D(A)$ 包含被 A 中某些元素占优的所有转归. 集合 $U(A)$ 包含不被 A 中任何元素占优的所有转归. 因此, $\mathrm{DC}(v) = U(I(v))$.

集合 $A \subset I(v)$ 是内部稳定的, 如果 A 中元素互不占优, 即 $A \cap D(A) = \varnothing$; 它是外部稳定的, 如果所有不在 A 中的元素都被 A 中的某一元素占优, 即 $I(v) \backslash A \subset D(A)$. 集合 $A \subset I(v)$ 是稳定集[78], 如果它既是内部稳定的, 也是外部稳定的.

很容易看到, 一个集合 $A \subset I(v)$ 是稳定集当且仅当 A 是 U 的不动点, 即 $U(A) = A$. 下列定理是定理 2.12 对多选择博弈的推广.

定理 11.12 令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$. 则以下两个断言成立:

(i) 每个稳定集都包含优势核心作为子集;

(ii) 如果优势核心是一个稳定集, 那么不存在其他稳定集.

在文献 [68] 中已经证明了, 存在不具有稳定集的合作 crisp 博弈. 因此, 由于我们的定义与对应的合作 crisp 博弈的定义是一致的, 所以, 可以断言, 多选择博弈不总是有稳定集的.

接下来, 介绍传统博弈等分核心的多选择博弈[28]. 设 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, $s \in \mathcal{M}^N$. 令 $\|s\|_1 = \sum_{i=1}^{n} s_i$ 是基于参与状态 s 的参与者水平之和. 给定 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, $s \in \mathcal{M}_+^N$, 用 $\alpha(s,v)$ 表示关于 v 的 s 的 (单位水平) 平均价值, 即

$$\alpha(s,v) := \frac{v(s)}{\|s\|_1}.$$

注意, $\alpha(s,v)$ 可以解释为联盟 s 的每一个单位水平增加值.

定义 11.13 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的**等分核心** $\mathrm{EDC}(v)$ 是集合 $\{x: M \to \mathbb{R} | X(m) = v(m), \nexists\, s \in \mathcal{M}_+^N$, 使得对所有的 $i \in \mathrm{car}(s), j \in M_i^+$, 都有 $\alpha(s,v) > x_{ij}\}$.

因此, $x \in \mathrm{EDC}(v)$ 可以看成是大联盟 m 值的分配, 其中, 对每个多选择联盟 s, 存在一个参与者 i, 他具有在 s 中正的参与水平和一个活动水平 $j \in M_i^+$, 使得支付 x_{ij} 至少和 $v(s)$ 的等分份额 $\alpha(s,v)$ 一样好.

下一个定理讨论一个博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的等分核心和该博弈预核心之间的关系.

定理 11.14 令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 则 $\mathcal{PC}(v) \subset \mathrm{EDC}(v)$.

证明　我们证明 $x \notin \mathrm{EDC}(v)$ 蕴含 $x \notin \mathcal{PC}(v)$. 假定 $x \notin \mathrm{EDC}(v)$, 那么存在 $s \in \mathcal{M}_+^N$, 使得 $\alpha(s,v) > x_{ij}$, 对所有的 $i \in \mathrm{car}(s)$ 和 $j \in \{1,\cdots,s_i\}$ 成立. 得到

$$X_{is_i} = \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij} < s_i\alpha(s,v),$$

蕴含

$$X(s) = \sum_{i\in N} X_{is_i} < \sum_{i\in N} s_i\alpha(s,v) = \alpha(s,v)\sum_{i\in N} s_i = v(s).$$

因此, $x \notin \mathcal{PC}(v)$.

注意到, 定理 11.14 中的包含关系可以是严格的, 就像在合作 crisp 博弈中的情形一样.

11.2　边际向量和 Weber 集

令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 假定大联盟 $m = (m_1,\cdots,m_n)$ 是一步一步形成的, 从联盟 $(0,\cdots,0)$ 开始, 每一步, 都有一个参与者的水平增加 1. 因此, 特别地, 在这个过程中, 共有 $\sum_{i\in N} m_i$ 步. 现在, 给每个参与者对每个水平分配一个边际向量, 它是当参与者从与指定的参与水平相邻的低水平直接达到高参与水平时产生的. 将之形式化如下.

(对 v) 容许排序是一个双射 $\sigma: M^+ \to \left\{1,\cdots,\sum_{i\in N} m_i\right\}$, 满足对所有的 $i \in N$, $j \in \{1,\cdots,m_i - 1\}$, 有 $\sigma((i,j)) < \sigma((i,j+1))$. 对 v 容许排序的个数是 $\dfrac{\left(\sum_{i\in N} m_i\right)!}{\prod_{i\in N}(m_i!)}$.

对 v 所有容许排序的集合记为 $\Xi(v)$.

现在令 $x \in \Xi(v)$, $k \in \left\{1,\cdots,\sum_{i\in N} m_i\right\}$, 按照 σ 在 k 步以后获得的这个联盟记为 $s^{\sigma,k}$, 它满足对所有 $i \in N$,

$$s_i^{\sigma,k} := \max\left(\{j \in M_i | \sigma((i,j)) \leqslant k\} \cup \{0\}\right),$$

对应于 σ 的边际向量 $w^\sigma: M \to \mathbb{R}$ 定义为, 对所有 $i \in N$ 和 $j \in M_i^+$,

$$w_{ij}^\sigma := v\left(s^{\sigma,\sigma((i,j))}\right) - v\left(s^{\sigma,\sigma((i,j))-1}\right).$$

一般地, 多选择博弈的边际向量不一定是转归, 但是对于 0-单调博弈这是一定的.

定理 11.15　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 是 0-单调的, 那么对每个 $\sigma \in \Xi(v)$, 对应于 σ 的边际向量是 v 的转归.

最后, 考虑一个多选择博弈边际向量的凸包, 也就是说, 它的 Weber 集.

定义 11.16[82]　博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的 **Weber 集** $W(v)$ 定义为

$$W(v) := \mathrm{co}\left\{w^{\sigma} | \sigma \in \Xi(v)\right\}.$$

下一个定理给出多选择博弈 v 的核心 $C(v)$ 和 Weber 集 $W(v)$ 之间的关系.

定理 11.17　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, $x \in C(v)$. 那么存在 $y \in W(v)$, 满足它比 x 弱小.

证明　实际上只要证明, 对每个博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 以及每个 $x \in \tilde{C}(v)$, 存在向量 $y \in W(v)$, 使得 y 比 x 弱小, 其中, $\tilde{C}(v)$ 是核心 $C(v)$ 捕捉器 ($C(v) \subset \tilde{C}(v)$), 定义为

$$\tilde{C}(v) = \left\{x \in I(v) | X(s) \geqslant v(s),\ \forall s \in \mathcal{M}^N,\ x_{i0} = 0,\ \forall i \in N\right\}.$$

下面对博弈 v 中包含的水平的数目归纳证明, 分两个基本步骤 (i) 和 (ii).

(i) 令 $v \in \mathrm{MC}^{\{1\},m}$, $m_1 \in \mathbb{N}$ 是任意的. 那么存在唯一的边际向量 y 满足, 对所有的 $j \in \{1, \cdots, m_1\}$ 有

$$y_{1j} = v\left(je^1\right) - v\left((j-1)\,e^1\right).$$

假定 $x \in \tilde{C}(v)$, 那么

$$X\left(m_1 e^1\right) = v\left(m_1 e^1\right) = Y\left(m_1 e^1\right),$$

以及对所有的 $j \in \{1, \cdots, m_1\}$ 有

$$X\left(je^1\right) \geqslant v\left(je^1\right) = Y\left(je^1\right).$$

因此, y 比 x 弱小.

(ii) 令 $v \in \mathrm{MC}^{\{1,2\},m}$, 满足 $m = (1, 1)$, 那么存在两个边际向量

$$y^1 = \begin{bmatrix} v\left(e^1\right) \\ v\left(e^1+e^2\right) - v\left(e^1\right) \end{bmatrix},\quad y^2 = \begin{bmatrix} v\left(e^1+e^2\right) - v\left(e^2\right) \\ v\left(e^2\right) \end{bmatrix}.$$

假定 $x \in \tilde{C}(v)$, 那么

$$x_{11} \geqslant v\left(e^1\right),\quad x_{21} \geqslant v\left(e^2\right)\quad 以及\quad x_{11} + x_{21} \geqslant v\left(e^1 + e^2\right).$$

因此, x 是 y^1 和 y^2 的凸组合, 得到 $x \in W(v)$.

现在将精力放在归纳法步骤上. 令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 满足 $|\{i \in N | m_i > 0\}| \geqslant 2$ 和 $\sum\limits_{i \in N} m_i > 2$. 假定已经证明了, 对所有的 $\overline{v} \in \mathrm{MC}^{\overline{N},\overline{m}}$ 满足 $\sum\limits_{i \in \overline{N}} \overline{m}_i < \sum\limits_{i \in N} m_i$. 由

于, 很明显, $\tilde{C}(v)$ 和 $W(v)$ 都是凸集, 故只需证明对 $\tilde{C}(v)$ 的所有极点 x, 可以找到 $y \in W(v)$ 使得 y 比 x 弱小. 因此, 令 x 是 $\tilde{C}(v)$ 的一个极点, 令 $t \in \mathcal{M}^N$ 满足 $1 \leqslant \sum_{i\in N} t_i \leqslant \sum_{i\in N} m_i - 1$ 以及 $X(t) = v(t)$. 博弈 v 可以分裂成两个博弈: 一个具有活动水平为 t 向量的博弈 u, 以及一个具有活动水平为 $m-t$ 向量的博弈 w, 这里 u 定义为, 对所有满足 $s \leqslant t$ 的 $s \in \mathcal{M}^N$ 有

$$u(s) := v(s),$$

w 定义为, 对所有满足 $s \leqslant m-t$ 的 $s \in \mathcal{M}^N$ 有

$$w(s) := v(s+t) - v(t).$$

支付 x 也可以分裂成两部分,

$$x^u : \{(i,j) | i \in N, j \in \{0,\cdots,t_i\}\} \to \mathbb{R}$$

和

$$x^w : \{(i,j) | i \in N, j \in \{0,\cdots,m_i - t_i\}\} \to \mathbb{R}.$$

分别定义为, 对所有的 $i \in N$ 和 $j \in \{0,\cdots,t_i\}$,

$$x^u_{ij} := x_{ij}$$

和

$$x^w_{ij} := \begin{cases} x_{i,j+t_i}, & \text{如果 } i \in N, j \in \{1,\cdots,m_i - t_i\}, \\ 0, & \text{如果 } i \in N, j = 0. \end{cases}$$

现在, 由于对所有满足 $s \leqslant t$ 的 $s \in \mathcal{M}^N$ 有 $X^u(t) = X(t) = v(t) = u(t)$, 以及 $X^u(s) = X(s) \geqslant v(s) = u(s)$, 所以, $x^u \in \tilde{C}(v)$. 进一步, $x^w \in \tilde{C}(w)$, 因为

$$\begin{aligned} X^w(m-t) &= \sum_{i\in N} \sum_{j=1}^{m_i - t_i} x_{i,j+t_i} \\ &= X(m) - X(t) = v(m) - v(t) = w(m-t) \end{aligned}$$

及对所有满足 $s \leqslant m-t$ 的 $s \in \mathcal{M}^N$ 有

$$\begin{aligned} X^w(s) &= \sum_{i\in N} \sum_{j=1}^{s_i} x_{i,j+t_i} \\ &= X(s+t) - X(t) \geqslant v(s+t) - v(t) = w(s). \end{aligned}$$

使用归纳法, 假设可以找到 $y^u \in W(u)$ 使得 y^u 比 x^u 弱小; 找到 $y^w \in W(w)$ 使得 y^w 比 x^w 弱小. 那么 $y := (y^u, y^w)$ 比 $x := (x^u, x^w)$ 弱小. 因此, 只剩下证明 $y \in W(v)$.

对于 u 的支付向量

$$z^1 : \{(i,j)|i \in N, j \in \{0,\cdots,t_i\}\} \to \mathbb{R},$$

w 的支付向量

$$z^2 : \{(i,j)|i \in N, j \in \{0,\cdots,m_i - t_i\}\} \to \mathbb{R},$$

可以定义 v 的支付向量 $(z^1, z^2) : M \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\left(z^1, z^2\right)_{ij} := \begin{cases} z^1_{ij}, & \text{如果 } i \in N, j \in \{0,\cdots,t_i\}, \\ z^2_{ij}, & \text{如果 } i \in N, j \in \{t_i + 1,\cdots,m_i\}. \end{cases}$$

下面证明

$$(W(u), W(w)) := \left\{\left(z^1, z^2\right) | z^1 \in W(u), z^2 \in W(w)\right\}$$

是 $W(v)$ 的子集. 注意, $(W(u), W(w))$ 和 $W(v)$ 是凸集, 因此, 只需证明 $(W(u), W(w))$ 的极点也是 $W(v)$ 的元素即可. 假定 (z^1, z^2) 是 $(W(u), W(w))$ 的极点, 那么, 很明显, z^1 是 u 的边际向量, z^2 是 w 的边际向量. 令 $\sigma \in \Xi(u)$, $\rho \in \Xi(w)$, 满足使 z^1 是对应于 σ 的 u 的边际向量, z^2 是对应于 ρ 的 w 的边际向量. 那么 (z^1, z^2) 是对应于 τ 的 v 的边际向量, 其中

$$\tau((i,j)) := \begin{cases} \sigma((i,j)), & \text{如果 } i \in N, j \in \{0,\cdots,t_i\}, \\ \rho((i,j-t_i)), & \text{如果 } i \in N, j \in \{t_i + 1,\cdots,m_i\}. \end{cases}$$

因此, $(z^1, z^2) \in W(v)$. 这就完成了定理的证明.

11.3 类-Shapley 值

将合作 crisp 博弈的 Sharpley 值的概念合理推广到多选择博弈的方法不止一种. 首先, 我们介绍文献 [82] 中的方法: 用多选择博弈的边际向量的平均值来推广由 crisp 博弈到多选择博弈的 Shapley 值.

定义 11.18[82] 令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 那么 **Shapley 值** $\Phi(v)$ 是 v 的所有的边际向量的平均值, 形式上,

$$\Phi(v) := \frac{\prod_{i \in N}(m_i!)}{\left(\sum_{i \in N} m_i\right)!} \sum_{\sigma \in \Xi(v)} w^\sigma.$$

定义 11.18 中定义的 Φ 值可以由可加性、载体性 (carrier property) 以及分层强度性 (hierarchical strength property) 来描述. 对于在 $s \in \mathcal{M}^N_+$ 中的满足 $j \leqslant s_i$

的 $(i,j) \in M^+$ 的分层强度性 $h_s((i,j))$ 定义为那些 $\sigma \in \Xi(v)$ 的平均数, 其中 (i,j) 是在 σ 中 s-最大的, 也就是说, $h_s((i,j))$ 等于

$$\frac{\prod_{i \in N}(m_i!)}{\left(\sum_{i \in N} m_i\right)!}\left|\left\{\sigma \in \Xi(v) \middle| \sigma((i,j)) = \max_{(k,l):l \leqslant s_k} \sigma((k,l))\right\}\right|.$$

• 分配规则 $\gamma: \mathrm{MC}^{N,m} \to \mathbb{R}^{M^+}$ 满足分层强度性, 如果对每个 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 满足其为一个最小努力博弈的倍数, 即 $v = \beta u_s$, 这里 $s \in \mathcal{M}_+^N$ 以及 $\beta \in \mathbb{R}$, 我们有, 对所有的 $(i_1,j_1),(i_2,j_2) \in M^+$

$$\gamma_{i_1,j_1}(v) \cdot h_s(i_2,j_2) = \gamma_{i_2,j_2}(v) \cdot h_s(i_1,j_1).$$

分配规则 $\gamma: \mathrm{MC}^{N,m} \to \mathbb{R}^{M^+}$ 的可加性和载体性如下引入.

• 可加性: 对所有的 $v, w \in \mathrm{MC}^{N,m}$

$$\gamma(v+w) = \gamma(v) + \gamma(w).$$

• 载体性: 如果 t 是 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的载体, 即对所有的 $s \in \mathcal{M}^N$, $v(s) = v(s \wedge t)$, 则

$$\sum_{i \in \mathrm{car}(t)} \sum_{j=1}^{t_i} \gamma_{ij}(v) = v(m).$$

读者可以参考文献 [49] 得到下面定理的证明.

定理 11.19　值 Φ 是 $\mathrm{MC}^{N,m}$ 上满足可加性、载体性以及分层强度性的唯一分配规则.

现在, 由文献 [81], 我们考虑文献 [61] 中引入的类-Shapley 值. 这些值是由活动上的权重来定义的, 因此, 是加权 Shapley 值的推广想法[63].

当介绍文献 [61] 中的值的时候, 必须限制到所有的参与者都有同样活动水平数的多选择博弈上. 因此, 令 $\mathrm{MC}_*^{N,m}$ 表示 $\mathrm{MC}^{N,m}$ 的子集, 满足性质: 对所有的 $i,j \in N$ 都有 $m_i = m_j$. 对 $v \in \mathrm{MC}_*^{N,m}$, 令 $\tilde{m} := m_i$ ($i \in \mathbb{R}$ 任意), 且设对每个 $j \in \{0,\cdots,\tilde{m}\}$, 有一个与水平 j 对应的权重 $w_j \in \mathbb{R}$ 满足水平越高对应的权重越大, 即 $0 = w_0 < w_1 < \cdots < w_{\tilde{m}}$. 值 Ψ 是基于权重 w 来定义的.

定义 11.20[61]　对于 $s \in \mathcal{M}_+^N$, **最小努力博弈** u_s 的值 $\Psi^w(u_s)$ 定义为, 对所有的 $i \in N$ 和 $j \in M_i$,

$$\Psi_{ij}^w(u_s) = \begin{cases} \dfrac{w_j}{\sum_{i \in N} w_{s_i}}, & \text{如果 } j = s_i, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

任意一个博弈 $v \in \mathrm{MC}_*^{N,m}$ 的类-Shapley 值 $\Psi^w(v)$ 的定义是基于 v 的如下表述, 即用多选择博弈的红利的方式将 v 表示为一些相关的最小努力博弈的加权和 (参见定理 11.21). crisp 博弈[55] 的红利的定义可以推广到多选择博弈, 如下：对 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$,

$$\begin{aligned} &\Delta_v(0) := 0, \\ &\Delta_v(s) := v(s) - \sum_{t \leqslant s, t \neq s} \Delta_v(t). \end{aligned} \tag{11.6}$$

定理 11.21 最小努力博弈 $u_s \in \mathrm{MC}^{N,m}$, $s \in \mathcal{M}_+^N$, 形成了空间 $\mathrm{MC}^{N,m}$ 的基. 进一步, 对 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 它满足

$$v = \sum_{s \in \mathcal{M}_+^N} \Delta_v(s) u_s.$$

这样, 任意一个博弈 $v \in \mathrm{MC}_*^{N,m}$ 的类-Shapley 值 $\Psi^w(v)$ 可以定义为

$$\Psi^w(v) := \sum_{s \in \mathcal{M}_+^N} \Delta_v(s) \Psi^w(u_s).$$

文献 [61] 给出了这个值的公理化描述, 用到了可加性, 载体性, 最小努力性和另外一个使用权重的公理. 下面描述分配规则 $\gamma : \mathrm{MC}^{N,m} \to \mathbb{R}^{M^+}$ 的一个新的性质.

• 最小努力性：如果 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, $t \in \mathcal{M}^N$ 满足对 $s \ngeq t$ 的所有 s 有 $v(s) = 0$, 那么对所有 $i \in N$, $j < t_i$, 有

$$\gamma_{ij}(v) = 0.$$

• 权重性：假定权重 $0 = w_0 < w_1 < \cdots < w_{\tilde{m}}$ 已经给定. 如果一个博弈 $v \in \mathrm{MC}_*^{N,m}$ 是最小努力博弈的倍数, 即 $v = \beta u_s$, $s \in \mathcal{M}^N$, 那么对所有的 $i, j \in N$

$$\gamma_{i,s_i}(v) \cdot w_{s_j} = \gamma_{j,s_j}(v) \cdot w_{s_i}.$$

读者可以参考文献 [61] 得到下面的证明.

定理 11.22 考虑 $\mathrm{MC}_*^{N,m}$ 类. 设权重 $0 = w_0 < w_1 < \cdots < w_{\tilde{m}}$ 已经给定. 那么 Ψ^w 是 $\mathrm{MC}_*^{N,m}$ 上的满足可加性、载体性、最小努力性和权重性的唯一分配规则.

注释 11.23 用于在定义 11.18 介绍的值 Φ 的公理化描述的分层强度性考虑了最小努力性和权重性, 其中不同之处在于：所用的 “权重”, 现在是由参与者的活动水平数来确定的[49].

现在出现一个有趣的问题是, 值 Φ 是否和值 Ψ^w 有关? 下面用一个多选择博弈的例子来说明值 Φ 和任何 Ψ^w 的值都不相等.

例 11.24　令 $v \in \mathrm{MC}^{\{1,2\},m}$, 其中 $m=(3,3)$, 令 $v=u_{(1,2)}+u_{(3,1)}+u_{(2,3)}$. 对这个博弈, 共有 20 种容许排序, 经计算

$$\Phi(v)=\begin{bmatrix} \frac{4}{20} & \frac{4}{20} & \frac{19}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{16}{20} & \frac{16}{20} \end{bmatrix}.$$

现在, 假定有对应于活动水平的权重 $w_1<w_2<w_3$, 那么, 对应的值 Ψ^w 是

$$\Psi^w(v)=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1+w_2} & \frac{w_2}{w_2+w_3} & \frac{w_3}{w_1+w_3} \\ \frac{w_1}{w_1+w_3} & \frac{w_2}{w_1+w_2} & \frac{w_3}{w_2+w_3} \end{bmatrix}.$$

因此, 如果想找到权重 w 使得 $\Psi^w(v)=\Phi(v)$, 那么这些权重应该满足条件 $0<w_1<w_2<w_3$, $w_2=4w_1$, $w_3=4w_2$ 以及 $w_3=19w_1$. 很明显, 不可能找到满足这些条件的权重.

文献 [33] 进一步研究了 Shapley 值 Φ, 其中主要考虑的是参与者的总支付而非水平支付向量. 同时, 证明了 Φ 对应于文献 [75] 中提出的离散 Aumann-Shapley 方法, 并且具有连续参与者[7] 的博弈的 Aumann-Shapley 值可以用多选择博弈的容许排序的多选择值 Φ 的极限来得到, 这个极限收敛到连续博弈.

另一个将 crisp 博弈的 Shapley 值推广到多选择博弈的 Shapley 值 Θ 的方法是在文献 [40] 中介绍的. 文献 [65] 证明了, Θ 可以看做是 $\mathcal{M}_+^N$ 中的元素的平均边际贡献的 (水平) 支付向量, 并且通过一个例子说明, 在某些条件下, Θ 似乎比 Φ 更恰当. 在文献 [81] 中, 通过对在文献 [128] 中提供的对 crisp 博弈的 Shapley 值的描述的扩展, 公理化描述了 Shapley 值 Θ. 文献 [65] 给出了 Θ 的一些其他特征.

第四个用于多选择博弈的类-Shapley 值是文献 [88] 中介绍的平等主义多选择解 ε. 我们注意, 这个 Shapley 值没有完全用到特征函数的全部信息. 特别地, 解 ε 是用这些多选择联盟的值定义的, 其中这些联盟中仅有一个参与者以中间水平参与, 其他参与者或者是不活动的 (也就是说, 他们的参与水平是 0), 或者是以最大参与水平活动. 文献 [88] 用有效性、零贡献性、可加性、匿名性, 以及水平–对称性对这个解 ε 进行了公理化描述.

最后, 关于将 crisp 博弈的 Shapley 值向多选择博弈的其他推广, 建议读者参考文献 [53].

11.4　多选择博弈的等分离集

这一节将注意力放在传统合作博弈的等分离集的多选择版本上 (参见第 4.2 节). 具体地, 我们获得了多选择博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的等分离集 $\mathrm{ESOS}(v)$, 这个值是

通过一个过程得到的, 在这个过程的每一步, 会获得一个具有最高 (每单位水平增加的) 平均值的多选择联盟, 以及对应的联盟的水平等分收益. 注意到, 这样的多选择联盟不需要是具有最高平均值收益的最大联盟. 下面具体描述这个将产生多选择等分离分配的算法.

第一步: 考虑 $m^1 := m$, $v_1 := v$. 在 $\arg \max_{s\in\mathcal{M}^N_{m^1}\setminus\{0\}} \alpha(s,v_1)$ 中挑选一个元素使其具有最大水平之和, 记为 s^1. 对每个 $i \in \operatorname{car}(s^1)$, $j \in M_i^{s^1}$, 定义 $e_{ij} := \alpha(s^1, v_1)$. 如果 $s^1 = m$, 则停止; 否则, 继续.

第 k 步: 假定基于 (水平) 等分享原理递归定义了 $s^1, s^2, \cdots, s^{k-1}$, 并且 $s^1+s^2+\cdots+s^{k-1}\neq m$, 定义一个新的具有参与者集合 N 和最大参与状态 $m^k := m-\sum_{i=1}^{k-1} m^i$ 的多选择博弈 v_k, 它满足对每个多选择联盟 $s\in\mathcal{M}^N_{m^k}$, $v_k(s) := v_{k-1}(s+s^{k-1}) - v_{k-1}(s^{k-1})$. 在 $\arg \max_{s\in\mathcal{M}^N_{m^k}\setminus\{0\}} \alpha(s,v_k)$ 中选定一个元素 s^k, 并且对所有的 $i \in \operatorname{car}(s^k)$ 和 $j \in \left\{\sum_{p=1}^{k-1} s_i^p+1, \cdots, \sum_{p=1}^{k} s_i^p\right\}$, 定义 $e_{ij} := \alpha(s^k, v_k)$.

在有限步, 假设是 K 步, 其中 $K \leqslant |M^+|$, 算法将结束, 并且构造的 (水平) 支付向量 $(e_{ij})_{(i,j)\in M^+}$ 称为多选择博弈 v 的等分离分配, 记为 $e(v)$.

定义 11.25 $v\in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的**等分离集合** $\mathrm{ESOS}(v)$ 是包含所有等分离分配 $e(v)$ 的集合.

注释 11.26 注意对每个 $v\in\mathrm{MC}^{N,m}$, 上面描述的是对多选择博弈的 Dutta-Ray 算法, 在 K 步内确定了一个 (每单位水平增加的) 平均值 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_K$ 序列, 其中对每个 $k \in \{1,\cdots,K\}$, $\alpha_k := \alpha(s^k, v_k)$, 并且确定了一个在 M_+^N 中的多选择联盟序列, 记为 $t^1 := s^1$, $t^2 := s^1+s^2, \cdots, t^k := s^1+\cdots+s^k, \cdots, t^K := s^1+\cdots+s^K = m$. 这样, 获得了从 0 到 m 的一条路 $\langle t^0, t^1, \cdots, t^K\rangle$, 其中 $t^0=0$. 这条路可对应 M 的一个适当有序分割 $T^1, T^2, \cdots, T^K$, 使得对所有的 $k\in\{1,\cdots,K\}$, $T^k := \left\{(i,j) | i\in\operatorname{car}(t^k-t^{k-1}), j\in\left\{t_i^{k-1}+1,\cdots,t_i^k\right\}\right\}$, 其中对每个 $(i,j)\in T^k$, 有 $e_{ij}=\alpha_k$, 且联盟 t^k-t^{k-1} 是在 "盒子" T^K 中的具有平均收益 α_k 的最大参与状态. 注意, 在 T^K 中的其他的参与状态可以表示为 $s\wedge t^k - s\wedge t^{k-1} + t^{k+1}$, 其中 $s\in\mathcal{M}_+^N$. 很清楚, 这样一个参与状态的平均值是弱小于 α_k 的. 由于在算法中的每一步, 可能存在不止一个具有最大平均值的联盟, 每选择这样的一个联盟将产生一个适当有序分割. 注意有些 α_k 可能是相同的.

下一个例子演示了多选择博弈的 Dutta-Ray 算法.

例 11.27 考虑一个博弈 $v\in\mathrm{MC}^{\{1,2\},m}$ 满足 $m=(2,1)$, $v(0,0)=0$, $v(1,0)=3$, $v(2,0)=4$, $v(0,1)=2$, $v(1,1)=8$, $v(2,1)=10$. 这个博弈是凸的, 对其应用上

面描述的 Dutta-Ray 算法. 第一步, $\alpha_1 = 4$, $t^1 = s^1 = (1,1)$, 并且有 $e_{11} = e_{21} = 4$; 第二步, $\alpha_2 = 2$, $t^2 = (1,1) + (1,0)$, 并且有 $e_{12} = 2$. 我们得到 $e(v) = (4,2,4)$. 注意到, $\alpha_1 > \alpha_2$. 一般情况下这都是对的, 如命题 11.28 所述.

命题 11.28　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, $\alpha_k = \max\limits_{s \in \mathcal{M}^N_{m^k} \setminus \{0\}} \dfrac{v_k(s)}{\|s\|_1}$ 是由 Dutta-Ray 算法在第 k 步得到的 (水平) 等分享, 那么对所有的 $k \in \{1, \cdots, K-1\}$ 都有 $\alpha_k \geqslant \alpha_{k+1}$.

证明　由 v_k 和 α_k 的定义和注释 11.26, 有

$$\frac{v\left(t^k\right) - v\left(t^{k-1}\right)}{\left\|t^k - t^{k-1}\right\|_1} \geqslant \frac{v\left(t^{k+1}\right) - v\left(t^{k-1}\right)}{\left\|t^k - t^{k-1}\right\|_1 + \left\|t^{k+1} - t^k\right\|_1}.$$

上式右端的分子分别加上和减去 $v(t^k)$, 得

$$\frac{v\left(t^k\right) - v\left(t^{k-1}\right)}{\left\|t^k - t^{k-1}\right\|_1} \geqslant \frac{v\left(t^{k+1}\right) - v\left(t^k\right) + v\left(t^k\right) - v\left(t^{k-1}\right)}{\left\|t^k - t^{k-1}\right\|_1 + \left\|t^{k+1} - t^k\right\|_1}.$$

这个不等式等价于

$$\begin{aligned}&\left(v\left(t^k\right) - v\left(t^{k-1}\right)\right)\left\|t^k - t^{k-1}\right\|_1 + \left(v\left(t^k\right) - v\left(t^{k-1}\right)\right)\left\|t^{k+1} - t^k\right\|_1 \\ \geqslant &\left(v\left(t^{k+1}\right) - v\left(t^k\right)\right)\left\|t^k - t^{k-1}\right\|_1 + \left(v\left(t^k\right) - v\left(t^{k-1}\right)\right)\left\|t^k - t^{k-1}\right\|_1,\end{aligned}$$

它等价于

$$\left(v\left(t^k\right) - v\left(t^{k-1}\right)\right)\left\|t^{k+1} - t^k\right\|_1 \geqslant \left(v\left(t^{k+1}\right) - v\left(t^k\right)\right)\left\|t^k - t^{k-1}\right\|_1.$$

注释 11.29　对于满足超可加性的 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 用证明定理 4.7 的方法可以直接得到 $\mathrm{ESOS}(v) \subset \mathrm{EDC}(v)$.

第 12 章　多选择博弈的类

12.1　均衡多选择博弈

12.1.1　基本特征

文献 [82] 介绍了多选择博弈均衡的概念，并且根据定理 2.4 证明了一个定理，我们将在下面介绍.

定义 12.1　博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 称为是**均衡**的，如果对满足

$$\sum_{s \in \mathcal{M}_+^N} \lambda(s) e^{\mathrm{car}(s)} = e^N \tag{12.1}$$

的所有映射 $\lambda : \mathcal{M}_+^N \to \mathbb{R}_+$，有 $\sum\limits_{s \in \mathcal{M}_+^N} \lambda(s) v_0(s) \leqslant v_0(m)$ 成立，其中 v_0 是 v 的一个 0-规范化博弈.

注意，这个定义与 $m = (1, \cdots, 1)$ 的合作 crisp 博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 的均衡的定义是一致的 (参见定义 1.19).

下个定理是文献 [16] 和 [103] 证明的一个定理在多选择博弈上的推广，此定理给出了一个博弈核心非空的必要和充分条件.

定理 12.2　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$，那么 $C(v) \neq \varnothing$ 当且仅当 v 是均衡的.

证明　证明定理对 0-规范化成立即可.

假定 v 是 0-规范化的，$C(v) \neq \varnothing$，并且 $x \in C(v)$. 那么定义一个支付向量 $y : M^+ \to \mathbb{R}$，其中

$$y_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{如果 } i \in N, j \in \{2, \cdots, m_i\}, \\ \sum\limits_{l=1}^{m_i} x_{il}, & \text{如果 } i \in N, j = 1. \end{cases}$$

那么，很明显，$y \in C(v)$. 进一步，可认为 y 与 $(y_{11}, \cdots, y_{n1})$ 一致. 这就证明了 $C(v) \neq \varnothing$ 当且仅当存在 $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}_+$，使得对所有的 $s \in \mathcal{M}_0^N$，有

$$\sum_{i \in N} z_i = v(m) \tag{12.2}$$

和

$$\sum_{i \in \mathrm{car}(s)} z_i \geqslant v(s). \tag{12.3}$$

很明显, 存在 $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{R}_+$ 满足 (12.2) 式和 (12.3) 式当且仅当对所有的 $i \in N$ 和所有的 $s \in \mathcal{M}_+^N$, 有

$$v(m) = \min\left\{\sum_{i\in N} z_i \middle| z_i \in \mathbb{R}, \sum_{i\in \text{car}(s)} z_i \geqslant v(s)\right\}. \tag{12.4}$$

由线性规划理论的对偶定理 (参见定理 1.33) 知, (12.4) 式等价于

$$v(m) = \max\left\{\sum_{s\in \mathcal{M}_+^N} \lambda(s)v(s) \middle| (12.1)\text{ 式成立且 } \lambda(s) \geqslant 0\right\}. \tag{12.5}$$

很容易证明, (12.5) 式与 v 均衡是等价的.

这一节的剩余部分将研究多选择流博弈, 它是在研究具有委员会控制的流情况的时候出现的, 并研究它们与均衡多选择博弈之间的关系. 我们介绍的结果参考自文献 [82]. 用多选择博弈建模具有委员会控制的流情况, 允许一个联盟通过一定的努力去争取使用对应的弧, 例如, 对所使用的弧进行一定的维护. 具有委员会控制的流情况, 当在弧上的控制博弈是 crisp 博弈的时候产生 crisp 流博弈, 或者当在弧上的控制博弈是多选择博弈的时候产生多选择流博弈. 对于 crisp 流博弈的介绍可以参考文献 [64].

令 N 是参与者集合, $m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. 一个流情况是一个包含有两个特殊节点 (称为源点和汇点) 的有向网络. 对每个弧, 都有一个容量限制, 以及允许使用此弧的约束. 如果 l 是网络中的一个弧, w 是对弧 l 的一个 (简单) 控制博弈, 那么, 联盟 s 允许使用弧 l 当且仅当 $w(s) = 1$. 网络中弧 l 的容量用 $c_l \in (0, \infty)$ 表示. 对应于流情况的流博弈赋予其联盟 s 一个最大流, 这个最大流是联盟 s 可以从源点到汇点通过网络运送的最大流.

对于合作 crisp 博弈, 文献 [64] 证明了, 一个非负合作 crisp 博弈是完全均衡的当且仅当它是一个对应于流情况的流博弈, 其中在这个流情况中所有的弧由单个参与者控制 (参见定理 5.4). 独裁简单博弈和多选择情况下的完全均衡博弈的对应定义在下面给出.

定义 12.3　博弈 $v \in \text{MC}^{N,m}$ 称为是**独裁**的, 如果存在 $i \in N$ 和 $j \in M_i^+$, 使得对所有的 $s \in \mathcal{M}_+^N$, $v(s) = 1$ 当且仅当有 $s_i \geqslant j$.

定义 12.4　博弈 $v \in \text{MC}^{N,m}$ 称为是**完全均衡**的, 如果对每个 $s \in \mathcal{M}_+^N$, 子博弈 v_s 是均衡的, 其中, 对满足 $t \leqslant s$ 的所有 $t \in \mathcal{M}^N$, 都有 $v_s(t) := v(t)$.

但是, 正如文献 [82] 中示例的那样, 定理 5.4 不能够推广到多选择博弈上. 为了得到均衡性, 我们将其限制到 0-规范化博弈上. 那么有下列定理.

定理 12.5　考虑一个流情况, 其中所有的控制博弈是 0-规范化的和均衡的. 那么对应的流博弈 $v \in \text{MC}^{N,m}$ 是非负的、0-规范化的和均衡的.

证明 很明显, v 是 0-规范化的和非负的. 现在, 为了证明 v 是均衡的, 令 $L=\{l_1,\cdots,l_p\}$ 是一个具有容量 $c_1,\cdots,c_p$ 的弧的集合, 以及控制博弈 $w_1,\cdots,w_p$, 使得每个从源点到汇点的有向路, 包含 L 中的一条弧, 其 L 的容量 $\sum_{r=1}^{p} c_r$ 是最小的. 由文献 [48] 中的定理知, 对所有的 $s\in\mathcal{M}^N$ 有, $v(m)=\sum_{r=1}^{p} c_r$ 和 $v(s)\leqslant\sum_{r=1}^{p} c_r w_r(s)$.

现在, 对所有的 $r\in\{1,\cdots,p\}$, 令 $x^r\in C(w_r)$, 定义 $y:=\sum_{r=1}^{p} c_r x^r$. 那么,

$$Y(m)=\sum_{r=1}^{p} c_r X^r(m)=\sum_{r=1}^{p} c_r w_r(m)=v(m), \tag{12.6}$$

以及对所有的 $s\in\mathcal{M}^N$,

$$Y(s)=\sum_{r=1}^{p} c_r X^r(s)\geqslant\sum_{r=1}^{p} c_r w_r(s)\geqslant v(m). \tag{12.7}$$

令 $i\in N$ 和 $j\in M_i^+$, 由于 $c_r\geqslant 0$ 以及对所有的 $r\in\{1,\cdots,p\}$, $x_{ij}^r\geqslant 0$, 很容易得到

$$y_{ij}=\sum_{r=1}^{p} c_r x_{ij}^r\geqslant 0. \tag{12.8}$$

由 (12.6) 式、(12.7) 式和 (12.8) 式蕴含 $y\in C(v)$, 因此 v 是均衡的.

用下面定理证明定理 12.5 的逆.

定理 12.6 每个非负的、0-规范化的和均衡的多选择博弈是一个 0-规范化的均衡简单博弈的非负线性组合.

证明 令 $v\in\mathrm{MC}^{N,m}$ 是非负的、0-规范化的和均衡的. 我们提供一个算法将 v 表示为 0-规范化的均衡简单博弈的非负线性组合.

假定 $v\neq 0$, 设 $x\in C(v)$. 令 $k\in N$ 是集合

$$\{i\in N\mid \exists j\in N\ 使得\ x_{ij}>0\}$$

中的最小整数, 并且令 l 是集合 $\{j\in M_k^+|x_{kj}>0\}$ 中的最小整数.

进一步, 令

$$\beta:=\min\left\{x_{kl},\min\left\{v(s)|s\in\mathcal{M}_+^N,s_k\geqslant l,v(s)>0\right\}\right\},$$

且设 w 由下式定义, 对每个 $s\in\mathcal{M}^N$

$$w(s):=\begin{cases}1, & 如果\ s_k\geqslant l,v(s)>0,\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

那么, w 是一个 0-规范化的均衡简单博弈, 并且 $\beta > 0$.

令 $\bar{v} := v - \beta w$, $\bar{x} : M \to \mathbb{R}$ 由下式定义

$$\bar{x}_{ij} := \begin{cases} x_{kl} - \beta, & \text{如果 } i = k, j = l, \\ x_{ij}, & \text{否则.} \end{cases}$$

注意, $\bar{v}$ 是一个非负的、0-规范化的博弈, $v = \bar{v} + \beta w$, $\bar{x} \in C(\bar{v})$.

进一步,

$$|\{(i,j) \in M | \bar{x}_{ij} > 0\}| < |\{(i,j) \in M | x_{ij} > 0\}|,$$

或

$$\left|\{s \in \mathcal{M}^N | \bar{v}(s) > 0\}\right| < \left|\{s \in \mathcal{M}^N | v(s) > 0\}\right|.$$

如果 $\bar{v} \neq 0$, 则用 $\bar{v}$ 替换 v, 用 $\bar{x}$ 替换 x, 进行同样的过程. 很容易看到, 如果持续这个过程, 那么经过有限步后将得到 0 博弈. 假定这是发生在 q 步后, 那么可以得到 $\beta_1, \cdots, \beta_q > 0$, 以及 0-规范化的均衡简单博弈 $w_1, \cdots, w_q$, 使得 $v = \sum_{r=1}^{q} \beta_r w_r$.

定理 12.7　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 是非负的、0-规范化的和均衡的. 那么 v 是一个对应于流情况的流博弈, 其中在流情况中所有的控制博弈是 0-规范化的和均衡的.

证明　根据定理 12.6, 可以找到 $k \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \cdots, \beta_k > 0$, 以及 0-规范化的均衡简单博弈 $w_1, \cdots, w_k$, 使得 $v = \sum_{r=1}^{k} \beta_r w_r$.

现在考虑一个具有 k 个弧的流情况, 其中对每个弧 $r \in \{1, \cdots, k\}$, 弧 l_r 的容量限制用 β_r 表示, l_r 的控制博弈用 w_r 表示. 很容易看出, 对应于描述的流情况的流博弈是博弈 v.

结合定理 12.5 和定理 12.7, 我们得到下面推论.

推论 12.8　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 是非负的、0-规范化的. 那么 v 是均衡的当且仅当 v 是一个对应于流情况的流博弈, 其中在流情况中所有的控制博弈是 0-规范化的和均衡的.

12.1.2　完全均衡博弈和单调分配机制

文献 [28] 介绍的完全均衡多选择博弈的水平增加单调分配机制 (level-increase monotonic allocation schemes, limas) 的概念来源于合作 crisp 博弈的人口单调分配机制的概念[107].

定义 12.9　令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 是完全均衡博弈, $t \in \mathcal{M}_+^N$. 称 $a = \left[a_{ij}^t\right]_{i \in N, j \in M_i^t}^{t \in \mathcal{M}_+^N}$ 是一个**水平增加单调分配机制** (limas), 如果

(i) (稳定性条件) 对所有的 $t \in \mathcal{M}_+^N$, 有 $a^t \in C(v_t)$;

(ii) (水平增加单调条件) 对所有满足 $s \leqslant t$ 的 $s, t \in \mathcal{M}_+^N$, 所有的 $i \in \operatorname{car}(s)$ 以及所有的 $j \in M_i^s$, 都有 $a_{ij}^s \leqslant a_{ij}^t$.

注释 12.10　水平增加单调条件蕴含, 如果这个机制是用来调整多选择子博弈中 (水平) 支付的分布, 参与者得到的对每个一单位水平增加的支付在大的联盟中 (弱) 多于在小的联盟中的支付.

多选择博弈的完全均衡性对于 limas 的存在是必要条件, 它的充分条件是博弈的凸性, 正如第 12.2.2 节介绍的那样.

12.2　凸多选择博弈

12.2.1　基本描述

博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 是凸的, 如果对所有的 $s, t \in \mathcal{M}_+^N$, 有

$$v(s \wedge t) + v(s \vee t) \geqslant v(s) + v(t). \tag{12.9}$$

对于凸博弈 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, 有

$$v(s+t) + v(s) \geqslant v(\bar{s}+t) + v(\bar{s}), \tag{12.10}$$

对所有满足 $\bar{s} \leqslant s$, 对所有 $i \in \operatorname{car}(s)$ 都有 $\bar{s}_i = s_i$, 以及 $s+t \in \mathcal{M}^N$ 的 $s, \bar{s}, t \in \mathcal{M}^N$ 都成立. 这可以通过在表达式 (12.9) 中, 分别用 s 和 $\bar{s}+t$ 替换 s 和 t 而得到. 事实上, 满足表达式 (12.10) 的每个博弈都是凸的.

关系 (12.10) 可以看做是在传统凸博弈中对联盟的边际贡献单增性的多选择情况的推广. 特殊地, 当 t 是满足 $t_i \in M_i^+$ 且具有形式 $(0_{-i}, t_i)$ 时, 可得参与者的边际贡献单增性对凸多选择博弈也成立, 甚至获得了一个更精炼的结果, 因为参与者可以逐渐地增加他们的参与水平. 对于凸多选择博弈的其他描述, 读者可以参考文献 [28].

下面, 用 $\mathrm{CMC}^{N,m}$ 表示具有参与者集合 N 和最大参与属性 m 的凸多选择博弈的类. 对于这些博弈, 我们可以多介绍一些核心和 Weber 集之间的关系.

定理 12.11　令 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$, 那么 $W(v) \subset C(v)$.

证明　由 $C(v)$ 和 $W(v)$ 的凸性, 我们只需证明对所有的 $\sigma \in \Xi(v)$, $w^\sigma \in C(v)$. 因此, 令 $\sigma \in \Xi(v)$. w^σ 的有效性可以直接由其定义得到. 当使用表达式 (12.10) 时, w^σ 的水平增加合理性可以直接得到. 现在, 令 $s \in \mathcal{M}^N$. 很显然序 σ 导致一个容许排序 $\sigma' : \{(i,j) | i \in N, j \in \{1, \cdots, s_i\}\} \to \left\{1, \cdots, \sum_{i \in N} s_i\right\}$. 由于对所有的 $i \in N$ 和 $j \in \{1, \cdots, s_i\}$, 有 $s^{\sigma', \sigma'((i,j))} \leqslant s^{\sigma, \sigma((i,j))}$, v 的凸性蕴含对所有的 $i \in N$ 和 $j \in \{1, \cdots, s_i\}$, 有 $w_{ij}^{\sigma'} \leqslant w_{ij}^\sigma$. 因此,

$$\sum_{i\in N}\sum_{j=0}^{s_i} w_{ij}^{\sigma} \geqslant \sum_{i\in N}\sum_{j=0}^{s_i} w_{ij}^{\sigma'} = v(s).$$

得到结论 $w^\sigma \in C(v)$.

与凸 crisp 博弈的 $C(v) = W(v)$ (参见定理 5.10 (v)) 对比, 对于凸多选择博弈, 定理 12.11 的逆包含关系不成立. 下面给出一个 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$ 的例子, 满足 $W(v) \subset C(v)$, $W(v) \neq C(v)$.

例 12.12　令 $v \in \mathrm{CMC}^{\{1,2\},m}$, 其中 $m = (2,1)$, $v((1,0)) = v((2,0)) = v((0,1)) = 0$, $v((1,1)) = 2$, $v((2,1)) = 3$. 共有三个边际向量,

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & * \end{bmatrix},\quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & * \end{bmatrix},\quad w_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & * \end{bmatrix}.$$

计算表明, $C(v) = \mathrm{co}\{w_1, w_2, w_3, x\}$, 其中 $x = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$. 易见 $x \notin \mathrm{co}\{w_1, w_2, w_3\} = W(v)$.

例 12.12 中的核心元素 x 似乎是太大了: 注意 w_3 比 x 弱小, 但 w_3 仍在核心 $C(v)$ 中. 由此导出下面的概念.

定义 12.13　对于一个博弈 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$, **最小核心元素**的集合 $C_{\min}(v)$ 如下定义

$$\{x \in C(v) |\ \nexists\, y \in C(v) \text{ 使得 } y \neq x,\ y \text{ 比 } x \text{ 弱小}\}.$$

现有如下定理.

定理 12.14　令 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$, 则 $W(v) = \mathrm{co}\,(C_{\min}(v))$.

证明　我们由证明所有的边际向量是最小核心元素开始. 令 $\sigma \in \Xi(v)$, 那么 $w^\sigma \in C(v)$ (参见定理 12.11). 假定 $y \in C(v)$ 满足 $y \neq w^\sigma$ 且 y 比 w^σ 弱小. 令 $i \in N$ 和 $j \in M_i^+$ 满足 $Y\left(je^i\right) < \sum_{l=1}^{j} w_{il}^{\sigma}$ 且考虑 $t := s^{\sigma,\sigma((i,j))}$, 那么

$$Y(t) = \sum_{k\in N} Y\left(t_k e^k\right) < \sum_{k\in N}\sum_{l=0}^{t_k} w_{kl}^{\sigma} = v(t), \tag{12.11}$$

其中不等式来源于 $t_i = j$ 这样的事实, 最后一个等式来源于 t 和 w^σ 的定义. 现在, (12.11) 式蕴含 $y \notin C(v)$, 因此, 得到 $w^\sigma \in C_{\min}(v)$. 这直接蕴含

$$W(v) \subset \mathrm{co}\,(C_{\min}(v))\,. \tag{12.12}$$

现在, 令 x 是一个最小核心元素, 我们证明 $x \in W(v)$. 根据定理 11.7, 可以找到支付向量 $y \in W(v)$ 满足 y 是比 x 弱小的. 通过 (12.12) 式得, $y \in \mathrm{co}\,(C_{\min}(v)) \subset C(v)$. 由于 x 是最小的, 得到结论 $x = y \in W(v)$. 因此, $W(v) = \mathrm{co}\,(C_{\min}(v))$.

注意, 定理 12.14 蕴含, 对于凸 crisp 博弈, 核心与 Weber 集是一致的. 定理 12.14 的逆也是成立的, 如下定理.

定理 12.15 令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$ 满足 $W(v) = \mathrm{co}\,(C_{\min}(v))$. 则 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$.

证明 令 $s, t \in \mathcal{M}^N$. 显然存在一个 v 的容许排序 σ, 具有这样的性质: 存在满足 $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant \sum\limits_{i \in N} m_i$ 的 k, l, 使得 $s \wedge t = s^{\sigma,k}$ 和 $s \vee t = s^{\sigma,l}$. 注意, 对于相应的边际向量 w^σ, 有 $w^\sigma \in \mathrm{co}\,(C_{\min}(v)) \subset C(v)$. 由此得

$$\begin{aligned} v(s) + v(t) &\leqslant \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} w_{ij}^\sigma + \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{t_i} w_{ij}^\sigma \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{(s \wedge t)_i} w_{ij}^\sigma + \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{(s \vee t)_i} w_{ij}^\sigma \\ &= v\,(s \wedge t) + v\,(s \vee t)\,. \end{aligned}$$

其中, 最后一个等式来源于 w^σ 的定义. 因此, v 是凸的.

由定理 12.14 和定理 12.15, 立即可以得到下面推论.

推论 12.16 令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$. 则 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$ 当且仅当 $W(v) = \mathrm{co}\,(C_{\min}(v))$.

12.2.2 单调分配机制

这一节主要讨论水平增加单调分配机制 (limas), 并且证明多选择博弈的凸性是其存在的充分条件.

定义 12.17 令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, $x \in I(v)$. 称 x 是 **limas 扩展**, 如果存在一个 limas $a = \left[a_{ij}^t\right]_{i \in N, j \in M_i^t}^{t \in \mathcal{M}_+^N}$ 满足, 对每个 $i \in N$ 和 $j \in M_i^+$, 都有 $a_{ij}^m = x_{ij}$.

下个定理证明, 凸多选择博弈的最小核心凸包中的每个元素都是 limas 扩展. 证明中, 需要将 $\sigma \in \Xi(v)$ 限制到 v 的子博弈 v_t 上.

定理 12.18 令 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$ 且 $x \in \mathrm{co}\,(C_{\min}(v))$. 那么 x 是 limas 扩展.

证明 令 $x \in \mathrm{co}\,(C_{\min}(v))$, 由定理 12.14, 对 $\sigma \in \Xi(v)$, x 是边际向量 $m^{\sigma,v}$ 的凸组合, 因此, 只需证明 v 的每个边际向量 $m^{\sigma,v}$ 是 limas 扩展.

取 $\sigma \in \Xi(v)$, 对每个 $t \in \mathcal{M}_+^N$, $i \in N$ 和 $j \in M_i^+$, 通过 $a_{ij}^t := w_{ij}^{\sigma_t, v_t}$ 来定义 $a = \left[a_{ij}^t\right]_{i \in N, j \in M_i^t}^{t \in \mathcal{M}_+^N}$, 其中, σ_t 是 σ 在 t 上的限制. 接下来, 证明这个机制是 $w^{\sigma,v}$ 的 limas 扩展.

显然, 对每个 $i \in N$ 和 $j \in M_i^+$, 由于 $v_m = v$, 故有 $a_{ij}^m = w_{ij}^{\sigma,v}$. 进一步, 每个多选择子博弈 v_t, $t \in \mathcal{M}_+^N$ 都是一个凸博弈, 并且, 由于 $m_{ij}^{\sigma_t, v_t} \in W\,(v_t) \subset C\,(v_t)$ (参见定理 12.11), 那么 $\left(a_{ij}^t\right)_{i \in N, j \in M_i^t} \in C\,(v_t)$. 因此, 这个机制满足稳定性条件.

为了证明参与单调性条件, 取 $s, t \in \mathcal{M}_+^N$ 满足 $s \leqslant t$, $i \in \mathrm{car}(s)$, $j \in M_i^s \subset M_i^t$. 我们要证明 $a_{ij}^s \leqslant a_{ij}^t$. 现在, $a_{ij}^s = w_{ij}^{\sigma_s, v_s} = v\,(u_{-i}, j) - v\,(u_{-i}, j-1)$, 其中 (u_{-i}, j)

是, 当参与者 i 将他的参与水平从 $j-1$ 增加到 j 时, 限制 σ 到 s 上产生的最大链上的多选择联盟的中间值. 同样地, $a_{ij}^t = w_{ij}^{\sigma_t, v_t} = v(\bar{u}_{-i}, j) - v(\bar{u}_{-i}, j-1)$.

注意, 由于 $s \leqslant t$, 在由 σ_s 产生的最大链上, i 从 $j-1$ 到 j 增加他的参与水平不迟于在由 σ_t 产生的最大链上的同样的变换, 这蕴含 $(u_{-i}, j) \leqslant (\bar{u}_{-i}, j)$. 进一步, $(\bar{u}_{-i}, j) \leqslant m$. 那么

$$a_{ij}^s = v(u_{-i}, j) - v(u_{-i}, j-1) \leqslant (\bar{u}_{-i}, j) - v(\bar{u}_{-i}, j-1) = a_{ij}^t,$$

其中的不等式来源于 v 的凸性.

特别地, 我们使用了关系 (12.10), 其中由 $(u_{-i}, j-1)$ 取代 $\bar{s}$, $(\bar{u}_{-i}, j-1)$ 取代 s, $(0_{-i}, 1)$ 取代 t. 因此 $a = \left[a_{ij}^t\right]_{i\in N, j\in M_i^t}^{t\in \mathcal{M}_+^N}$ 是 $w^{\sigma,v}$ 的 limas 扩展.

由于凸多选择博弈的 Shapley 值 (参见定义 11.18) 是边际向量的平均值, 由定理 12.18 得, 凸多选择博弈的完全 Shapley 值, 即每个 t 行都是多选择子博弈 v_t 的 Shapley 值的机制 $\left[\Phi_{ij}^t\right]_{i\in N, j\in M_i^t}^{t\in \mathcal{M}_+^N}$, 是 v 的一个 limas (参见文献 [28] 中的例 4.2).

12.2.3　受限平等解

现在, 通过修正的 Dutta-Ray 算法[46], 来介绍博弈 $v \in \mathrm{CG}^N$ 的受限平等解的多选择情况[23]. 下一个命题起重要作用, 因为它表明对每一个多选择博弈都存在具有参与者的最大水平之和的唯一的多选择联盟, 其中最大值是在具有最高的 (每单位水平增加的) 平均值的联盟中取得的.

命题 12.19　设 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$, 令

$$A(v) := \left\{ t \in \mathcal{M}_+^N \middle| \alpha(t, v) = \max_{s\in \mathcal{M}_+^N} \alpha(s, v) \right\}.$$

集合 $A(v)$ 对连接算子 $\vee$ 是封闭的, 并且在 $\arg\max_{s\in \mathcal{M}_+^N} \alpha(s, v)$ 中存在唯一一个具有最大水平之和的元素.

证明　令 $\bar{\alpha} = \arg\max_{s\in \mathcal{M}_+^N} \alpha(s, v)$, 并取 $t^1, t^2 \in A(v)$. 我们必须证明 $t^1 \vee t^2 \in A(v)$, 也就是 $\alpha(t^1 \vee t^2) = \bar{\alpha}$. 由于 $v(t^1) = \bar{\alpha}\left\|t^1\right\|_1$, $v(t^2) = \bar{\alpha}\left\|t^2\right\|_1$, 得到

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}\left\|t^1\right\|_1 + \bar{\alpha}\left\|t^2\right\|_1 &= v(t^1) + v(t^2) \\
&\leqslant v(t^1 \vee t^2) + v(t^1 \wedge t^2) \\
&\leqslant \bar{\alpha}\left\|t^1 \vee t^2\right\|_1 + \bar{\alpha}\left\|t^1 \wedge t^2\right\|_1 \\
&= \bar{\alpha}\left\|t^1\right\|_1 + \bar{\alpha}\left\|t^2\right\|_1,
\end{aligned}$$

其中第一个不等式来源于 v 的凸性, 第二个不等式来源于 $\bar{\alpha}$ 的定义和 $v(0) = 0$ (在 $t^1 \wedge t^2 = 0$ 时) 的事实. 这蕴含着 $v(t^1 \vee t^2) = \bar{\alpha}\left\|t^1 \vee t^2\right\|_1$. 因此, 在 $t^1 \wedge t^2 \in A(v)$ 和

$\|t^1 \vee t^2\|_1 = 0$ 时, 有 $t^1 \vee t^2 \in A(v)$. 可以断言, 对任何 $t^1, t^2 \in A(v)$, 如果 $t^1 \wedge t^2 \neq 0$, 不但 $t^1 \vee t^2 \in A(v)$, 而且 $t^1 \wedge t^2 \in A(v)$. 进一步, $A(v)$ 对有限个 "并" 是封闭的, 其中 $t^1 \vee t^2$, 看成是 t^1 和 t^2 的 "并". 现在, 注意到集合 $A(v) \cup \{0\}$ 具有格结构, 并且 $\vee_{t \in A(v)} t$ 是 $A(v)$ 中的最大元素.

下面描述对于凸多选择博弈的 Dutta-Ray 算法.

第 1 步: 考虑 $m^1 := m$, $v_1 := v$. 在 $\arg \max\limits_{s \in \mathcal{M}_{m^1}^N \setminus \{0\}} \alpha(s, v_1)$ 中挑选具有最大水平之和的唯一元素, 记为 s^1. 对每个 $i \in \operatorname{car}(s^1)$ 和 $j \in M_i^{s^1}$, 定义 $d_{ij} := \alpha(s^1, v_1)$. 如果 $s^1 = m$, 则停止; 否则, 继续.

第 p 步: 假定已经递归定义了 $s^1, s^2, \cdots, s^{p-1}$, 并且 $s^1 + s^2 + \cdots + s^{p-1} \neq m$, 定义一个新的具有参与者集合 N 和最大参与状态 $m^p := m - \sum\limits_{i=1}^{p-1} m_i$ 的多选择博弈. 对每个多选择联盟 $s \in \mathcal{M}_{m^p}^N$, 定义 $v_p(s) := v_{p-1}(s + s^{p-1}) - v_{p-1}(s^{p-1})$. 博弈 $v_p \in \mathrm{MC}^{N, m^p}$ 是凸的. 记 s^p 为 $\arg \max\limits_{s \in \mathcal{M}_{m^p}^N \setminus \{0\}} \alpha(s, v_p)$ 中唯一的最大元素, 并且对所有的 $i \in \operatorname{car}(s^p)$ 和 $j \in \left\{\sum\limits_{k=1}^{p-1} s_i^k + 1, \cdots, \sum\limits_{k=1}^{p} s_i^k\right\}$, 定义 $d_{ij} := \alpha(s^p, v_p)$.

在有限步, 假设是 P 步, 其中 $P \leqslant |M^+|$, 算法将结束, 并且构造的 (水平) 支付向量 $(d_{ij})_{(i,j) \in M^+}$ 称为凸多选择博弈 v 的 (Dutta-Ray) 受限平等解 $d(v)$.

下一个例子显示凸多选择博弈的受限平等解不一定属于博弈的转归集.

例 12.20 考虑多选择博弈 $v \in \mathrm{CMC}^{\{1,2\}, m}$, 其中 $m = (3,2)$, $v((0,0)) = 0$, $v((1,0)) = v((0,1)) = 1$, $v((2,0)) = v((1,1)) = v((0,2)) = 2$, $v((2,1)) = v((1,2)) = 3$, $v((3,0)) = v((2,2)) = 5$, $v((3,1)) = 6$, $v((3,2)) = 12$. 受限平等解是 $d(v) = (2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4)$, 注意 $d_{13} = 2.4 < v(3e^1) - v(2e^1) = 5 - 2 = 3$, 因此, $d(v) \notin I(v)$.

注释 12.21 注意, 对每个 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$, 上面描述的 Dutta-Ray 算法在 P 步内确定了唯一一个 (每单位水平增加的) 平均值 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_P$ 序列, 其中对每个 $p \in \{1, \cdots, P\}$, 有 $\alpha_p := \alpha(s^p, v_p)$, 同时确定了一个在 $\mathcal{M}_+^N$ 中的多选择联盟序列, 记为 $t^1 := s^1$, $t^2 := s^1 + s^2, \cdots, t^p := s^1 + \cdots + s^p, \cdots, t^P := s^1 + \cdots + s^P = m$. 这样, 获得了一条从 0 到 m 的唯一的路 $\langle t^0, t^1, \cdots, t^P \rangle$, 其中 $t^0 = 0$. 这条路可以对应一个 M 的适当有序分割 $D^1, D^2, \cdots, D^P$, 使得对所有的 $p \in \{1, \cdots, P\}$,

$$D^p := \left\{(i,j) \middle| i \in \operatorname{car}(t^p - t^{p-1}), j \in \left\{t_i^{p-1} + 1, \cdots, t_i^p\right\}\right\},$$

其中对每个 $(i,j) \in D^p$, $d_{ij} = \alpha_p$, 以及联盟 $t^p - t^{p-1}$ 是在 "盒子" D^p 中的具有平均收益 α_p 的最大参与状态. 注意, 在 D^P 中的其他的参与状态可以表示为 $s \wedge t^p - s \wedge t^{p-1} + t^{p-1}$, 其中 $s \in \mathcal{M}_+^N$. 很清楚, 这样一个参与状态的平均收益是

弱小于 α_p 的, 并且命题 11.28 也是成立的. 因此, 对所有的 $p \in \{1, \cdots, P-1\}$, $\alpha_p \geqslant \alpha_{p+1}$.

接下来, 定理 12.23 将证明凸多选择博弈的受限平等解具有与传统凸博弈的受限平等解相似的性质. 我们需要下列引理.

引理 12.22　设 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$. 令 P 是构造博弈 v 的受限平等解 $d(v)$ 的 Dutta-Ray 算法的迭代数, 并且令 $t^1, \cdots, t^P$ 是在 $\mathcal{M}_+^N$ 中对应的多选择联盟序列, 那么, 对每个 $s \in \mathcal{M}_+^N$ 和每个 $p \in \{1, \cdots, P\}$,

$$v\left(s \wedge t^p - s \wedge t^{p-1} + t^{p-1}\right) - v\left(t^{p-1}\right) \geqslant v\left(s \wedge t^p\right) - v\left(s \wedge t^{p-1}\right).$$

证明　首先, 注意到, 对每个 $i \in N$, 由 $t_i^p > t_i^{p-1}$, 得

$$\min\left\{s_i, t_i^{p-1}\right\} = \min\left\{\min\left\{s_i, t_i^p\right\}, t_i^{p-1}\right\},$$

这蕴含 $s \wedge t^p = (s \wedge t^p) \wedge t^{p-1}$.

其次, 注意到, 对每个 $i \in N$, 要么 $\min\left\{s_i, t_i^{p-1}\right\} = t_i^{p-1}$, 要么 $\min\left\{s_i, t_i^{p-1}\right\} = s_i$, 并且对这两种情况, 有

$$\min\left\{s_i, t_i^p\right\} - \min\left\{s_i, t_i^{p-1}\right\} + t_i^{p-1} = \max\left\{\min\left\{s_i, t_i^p\right\}, t_i^{p-1}\right\},$$

这蕴含

$$\left(s \wedge t^p\right) - \left(s \wedge t^{p-1}\right) + t^{p-1} = \left(s \wedge t^p\right) \vee t^{p-1}.$$

现在, 由 v 的凸性 (用 $s \wedge t^p$ 取代 s 且 t^{p-1} 取代 t), 得到

$$v\left(\left(s \wedge t^p\right) \vee t^{p-1}\right) + v\left(s \wedge t^{p-1}\right) \geqslant v\left(s \wedge t^p\right) + v\left(t^{p-1}\right).$$

定理 12.23　设 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$. 那么受限平等分配 $d(v) = (d_{ij})_{i \in N, j \in M_i^+}$ 满足下列性质:

(i) $d(v) \in \mathcal{PC}(v)$;

(ii) $d(v)$ Lorenz 占优每个 $x \in \mathcal{PC}(v)$;

(iii) $d(v) \in \mathrm{EDC}(v)$.

证明　(i) 令 P 是 Dutta-Ray 算法的迭代数, $t^1, \cdots, t^P$ 是在 $\mathcal{M}_+^N$ 中对应的多选择联盟序列, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_P$ 是这些联盟的平均值序列. 注意到每个 $s \in \mathcal{M}_+^N$ 可以表示为

$$s = \left(s \wedge t^1\right) + \left(s \wedge t^2 - s \wedge t^1\right) + \cdots + \left(s \wedge t^P - s \wedge t^{P-1}\right),$$

其中某些项可能是 0. 那么, 由 $D(s)$ 和 α_p, $p \in \{1, \cdots, P\}$, 的定义, $D(s)$ 可以重写如下:

$$\begin{aligned}
D(s) &= \sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{s_i} d_{ij} \\
&= \left\|s\wedge t^1\right\|_1 \alpha_1 + \left\|s\wedge t^2 - s\wedge t^1\right\|_1 \alpha_2 + \cdots + \left\|s\wedge t^P - s\wedge t^{P-1}\right\|_1 \alpha_P \\
&= \left\|s\wedge t^1\right\|_1 \frac{v\left(t^1\right)}{\left\|t^1\right\|_1} + \left\|s\wedge t^2 - s\wedge t^1\right\|_1 \frac{v\left(t^2\right) - v\left(t^1\right)}{\left\|t^2 - t^1\right\|_1} \\
&\quad + \cdots + \left\|s\wedge t^P - s\wedge t^{P-1}\right\|_1 \frac{v\left(t^P\right) - v\left(t^{P-1}\right)}{\left\|t^P - t^{P-1}\right\|_1}.
\end{aligned}$$

现在, 考虑注释 12.21, 得到

$$\begin{aligned}
D(s) \geqslant& \left\|s\wedge t^1\right\|_1 \frac{v\left(t^1\right)}{\left\|s\wedge t^1\right\|_1} + \left\|s\wedge t^2 - s\wedge t^1\right\|_1 \frac{v\left(\left(s\wedge t^2\right) - \left(s\wedge t^1\right) + t^1\right) - v\left(t^1\right)}{\left\|s\wedge t^2 - s\wedge t^1\right\|_1} \\
&+ \cdots + \left\|s\wedge t^P - s\wedge t^{P-1}\right\|_1 \frac{v\left(\left(s\wedge t^P\right) - \left(s\wedge t^{P-1}\right) + t^{P-1}\right) - v\left(t^{P-1}\right)}{\left\|s\wedge t^P - s\wedge t^{P-1}\right\|_1} \\
\geqslant& \left\|s\wedge t^1\right\|_1 \frac{v\left(s\wedge t^1\right)}{\left\|s\wedge t^1\right\|_1} + \left\|s\wedge t^2 - s\wedge t^1\right\|_1 \frac{v\left(s\wedge t^2\right) - v\left(s\wedge t^1\right)}{\left\|s\wedge t^2 - s\wedge t^1\right\|_1} \\
&+ \cdots + \left\|s\wedge t^P - s\wedge t^{P-1}\right\|_1 \frac{v\left(s\wedge t^P\right) - v\left(s\wedge t^{P-1}\right)}{\left\|s\wedge t^P - s\wedge t^{P-1}\right\|_1} \\
=& v\left(s\wedge t^1\right) + \left(v\left(s\wedge t^2\right) - v\left(s\wedge t^1\right)\right) + \cdots + \left(v\left(s\wedge t^P\right) - v\left(s\wedge t^{P-1}\right)\right) \\
=& v\left(s\wedge t^P\right) = v(s),
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式来源于引理 12.22. 因此, 对每个 $s\in\mathcal{M}_+^N$, $D(s)\geqslant v(s)$. 最后, 由 d 的构造定义, $D(m)=v(m)$.

(ii) 令 $x\in\mathcal{PC}(v)$. 注意到, Lorenz 占优关系 (参见第 4.1 节) 可以直接推广到水平支付向量, 并且可以通过后向归纳法证明 $x\succ_{\mathrm{L}} d$ 蕴含 $x=d$. 假定 $0=t^0,t^1,\cdots,t^P=m$ 是 $\mathcal{M}^N$ 中对 d 的 Dutta-Ray 多选择联盟序列 (参见注释 11.26). 首先, 证明归纳法的基础, 即对每个 $(i,j)\in\left(t^{P-1},t^P\right]$, 有

$$d_{ij}=x_{ij}, \tag{12.13}$$

也就是说, 对所有的 j 有

$$t_i^{P-1}<j\leqslant t_i^P$$

其中 $i\in N$.

由命题 11.28 (参见注释 12.21), $d=(d_{ij})_{i\in N,j\in M_i^+}$ 的最小元素恰好对应元素 $(i,j)\in\left(t^{P-1},t^P\right]$, 并且

$$d_{ij}=\frac{v\left(t^P\right)-v\left(t^{P-1}\right)}{\left\|t^P-t^{P-1}\right\|_1}=\alpha_P.$$

由于 $x \succ_{\mathrm{L}} d$, 那么对所有的 $(i,j) \in \left(t^{P-1}, t^{P}\right]$, 有 $x_{ij} \geqslant d_{ij}$, 这蕴含了

$$x\left(\left(t^{P-1}, t^{P}\right]\right) = \sum_{(i,j)\in\left(t^{P-1},t^{P}\right]} x_{ij} \geqslant \sum_{(i,j)\in\left(t^{P-1},t^{P}\right]} d_{ij}$$
$$= d\left(\left(t^{P-1}, t^{P}\right]\right) = \alpha_P \left\|t^{P} - t^{P-1}\right\|_1.$$

假定 (12.13) 式不成立, 那么, 得到

$$x\left(\left(t^{P-1}, t^{P}\right]\right) > d\left(\left(t^{P-1}, t^{P}\right]\right) = v\left(t^{P}\right) - v\left(t^{P-1}\right).$$

但是, 由于 $x \in \mathcal{PC}(v)$, 故也有

$$x\left(\left(t^{P-1}, t^{P}\right]\right) = x\left(\left(0, t^{P}\right]\right) - x\left(\left(0, t^{P-1}\right]\right) = v\left(t^{P}\right) - x\left(\left(0, t^{P-1}\right]\right)$$
$$\leqslant v\left(t^{P}\right) - v\left(t^{P-1}\right) = \alpha_P \left\|t^{P} - t^{P-1}\right\|_1,$$

其中第二个等式来源于预核心元素的有效性条件, 不等式来源于预核心元素的稳定性条件. 因此, (12.13) 式是成立的.

现在, 证明归纳法步骤, 即对每个 $p \in \{P-1, \cdots, 1\}$, 下面也成立:

$$\text{若对每个 } (i,j) \in \left(t^{k}, t^{P}\right], \text{ 有 } x_{ij} = d_{ij}, \text{ 那么对每个 } (i,j) \in \left(t^{k-1}, t^{P}\right], \text{ 有 } x_{ij} = d_{ij}. \tag{12.14}$$

假定在 $\left(t^{k}, t^{P}\right]$ 上, $d = x$, 那么, 由命题 11.28, d 和 x 的最坏的 $\left\|t^{P} - t^{k}\right\|_1$ 元素都在 $\left(t^{k}, t^{P}\right]$ 中并且 “相等”. 由于 $x \succ_{\mathrm{L}} d$, 故有

(*) 对所有的 $(i,j) \in \left(t^{k-1}, t^{k}\right]$, $k \in \{1, \cdots, P\}$, 有 $x_{ij} \geqslant \alpha_k = d_{ij}$,

(**) 由于 $v\left(t^{P}\right) - v\left(t^{k}\right) = d\left(\left(t^{k}, t^{P}\right]\right) = x\left(\left(t^{k}, t^{P}\right]\right)$ 以及 $v\left(t^{P}\right) = x\left(\left(0, t^{P}\right]\right)$, 所以 $x\left(\left(0, t^{k}\right]\right) = \sum_{(i,j)\in\left(0,t^{k}\right]} x_{ij} = v\left(t^{k}\right)$.

那么, $x \in \mathcal{PC}(v)$ 蕴含

(***) $x\left(\left(t^{k-1}, t^{k}\right]\right) = x\left(\left(0, t^{k}\right]\right) - x\left(\left(0, t^{k-1}\right]\right) \leqslant v\left(t^{k}\right) - v\left(t^{k-1}\right) = \alpha_k \left\|t^{k} - t^{k-1}\right\|_1$, 其中不等式来源于 (**) 和稳定性条件. 那么, 由 (*) 和 (***) 有, 对所有的 $(i,j) \in \left(t^{k-1}, t^{k}\right]$, $x_{ij} = d_{ij}$, 并且, 在 $\left(t^{k-1}, t^{P}\right]$ 上, $x = d$.

(iii) 按照 (i) 和定理 11.14, 有 $d(v) \in \mathcal{PC}(v) \subset \mathrm{EDC}(v)$.

下个定理提供了凸多选择博弈类上的受限平等解的一个公理化描述, 与文献 [65] 中的定理 3.3 类似, 用到了下述的有效性、等分稳定性和最大相容性的多选择版本.

给定一个单值解 $\Lambda : \mathrm{CMC}^{N,m} \to \mathbb{R}^{\sum_{i\in N} m_i}$, 用 s^m 表示多选择联盟, 满足对每个 $i \in N$ 和所有的 $k \in \{1, \cdots, s_i^m\}$, 都有 $\Lambda_{ik}(v) = \max_{(i,j)\in M^+} \Lambda_{ij}(v)$. 称 Λ 满足

- 有效性：如果对所有的 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$, $\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{m_i}\Lambda_{ij}(v)=v(m)$;
- 等分稳定性：如果对所有的 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$, $\Lambda(v)\in \mathrm{EDC}(v)$;
- 最大相容性：如果对所有的 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$, 以及所有的 $(i,j)\in M^+$, $\Lambda_{ij}(v)=\Lambda_{ij}\left(v^{-s^m}\right)$, 其中 v^{-s^m} 是定义为, 对所有的 $t\in \mathcal{M}^N_{m-s^m}$, 都有 $v^{-s^m}(t)=v\left(t+s^m\right)-v\left(s^m\right)$ 的多选择博弈.

定理 12.24 存在唯一一个 $\mathrm{CMC}^{N,m}$ 上的满足有效性、等分稳定性和最大相容性的解, 它就是受限平等解.

12.2.4 解概念的性质

正如凸 crisp 博弈那样, 在凸多选择博弈上的解概念也有一些很好的性质.

首先, 注意到定理 12.11, $v\in\mathrm{CMC}^{N,m}$ 的 Shapley 值 $\Phi(v)$ (参见定义 11.18) 属于 v 的核心 $C(v)$. 进一步, 由于对应的广义 Shapley 值是该博弈的一个 limas, 因此, 多选择博弈的凸性是单调分配机制存在的充分条件.

其次, 凸多选择博弈的核心是该博弈唯一的稳定集.

定理 12.25 令 $v\in\mathrm{CMC}^{N,m}$, 那么 $C(v)$ 是唯一的稳定集.

证明 由推论 12.16 知, $C(v)\neq\varnothing$. 因此, 由定理 11.9 有, $C(v)=\mathrm{DC}(v)$. 所以, 由定理 11.12 (ii), 我们仅需证明 $C(v)$ 是稳定集.

$C(v)$ 的内部稳定性是明显的. 为了证明外部稳定性, 令 $x\in I(v)\backslash C(v)$, 构造占优 x 的 $z\in C(v)$. 首先, 选择 $s\in\mathcal{M}^N_+$, 使得

$$|\mathrm{car}(s)|^{-1}(v(s)-X(s))=\max_{t\in\mathcal{M}^N_+}|\mathrm{car}(t)|^{-1}(v(t)-X(t)).$$

由于 $x\notin C(v)$, 因此有

$$|\mathrm{car}(s)|^{-1}(v(s)-X(s))>0 \tag{12.15}$$

现在, 令 σ 是 v 的容许排序, 满足性质：存在 k 使得 $s=s^{\sigma,k}$. 那么 (参见定理 12.11), 对应的边际向量 w^σ 是 $C(v)$ 的一个元素, 并且, $\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{s_i}w^\sigma_{ij}=v(s)$ 成立. 为了标记方便, 令 $y:=w^\sigma$. 定义支付向量 z

$$z_{ij}:=\begin{cases}0, & \text{如果 } j=0,\\ x_{ij}, & \text{如果 } i\in\mathrm{car}(s), 2\leqslant j\leqslant s_i,\\ x_{i1}+|\mathrm{car}(s)|^{-1}(v(s)-X(s)), & \text{如果 } i\in\mathrm{car}(s), j=1,\\ y_{ij}, & \text{如果 } i\notin\mathrm{car}(s) \text{ 或 } i\in\mathrm{car}(s), j>s_i.\end{cases}$$

由 $x,y\in I(v)$ 及 (12.15) 式, 易知, z 是水平增加合理的. 进一步, $Z(m)=X(s)+(v(s)-X(s))+(Y(m)-Y(s))=v(s)+(v(m)-v(s))=v(m)$, 其中, 第二个等式来

源于选择 y 的方法. 这证明了 z 也是有效的, 因此, $z \in I(v)$. 由于 $Z(s) = v(s)$, 以及对所有的 $i \in \mathrm{car}(s)$, $Z_{is_i} = X_{is_i} + |\mathrm{car}(s)|^{-1}(v(s) - X(s)) > X_{is_i}$, 所以 $z\,\mathrm{dom}_s\, x$ 成立.

剩下就是要证明 $z \in C(v)$. 因此, 令 $t \in \mathcal{M}_+^N$, 分两种情况:

(a) 如果 $\mathrm{car}(t) \cap \mathrm{car}(s) = \varnothing$, 由于 $y \in C(v)$, 则 $Z(t) = Y(t) \geqslant v(t)$;

(b) 如果 $\mathrm{car}(t) \cap \mathrm{car}(s) \neq \varnothing$, 那么

$$\begin{aligned} Z(s \wedge t) &= (Z - X)(s \wedge t) + X(s \wedge t) \\ &= |\mathrm{car}(s) \cap \mathrm{car}(t)| \cdot |\mathrm{car}(s)|^{-1}(v(s) - X(s)) + X(s \wedge t) \\ &\geqslant v(s \wedge t) - X(s \wedge t) + X(s \wedge t) = v(s \wedge t), \end{aligned} \tag{12.16}$$

其中, 不等式来源于 (12.15) 式. 因此

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i \wedge t_i} z_{ij} + \sum_{i \in N: t_i > s_i} \sum_{j=s_i+1}^{t_i} y_{ij} \\ &= Z(s \wedge t) + \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i \vee t_i} y_{ij} - \sum_{i \in N: s_i \geqslant t_i} \sum_{j=1}^{s_i} y_{ij} - \sum_{i \in N: s_i < t_i} \sum_{j=1}^{s_i} y_{ij} \\ &= Z(s \wedge t) + Y(s \vee t) - Y(s) \\ &\geqslant v(s \wedge t) + v(s \vee t) - v(s). \end{aligned} \tag{12.17}$$

其中, 最后一个等式来源于 (12.16) 式和 $y \in C(v)$, 且满足 $Y(s) = v(s)$ 这样的事实. 由 v 的凸性, 可以看到, (12.17) 式的最后一个表达式是大于或等于 $v(t)$ 的. 这就完成了定理的证明.

最后, 用直截了当但是技术上有些愚笨的方法, 我们可以将凸 crisp 博弈的等分离集合 (参见第 5.2.4 节) 推广到凸多选择博弈上. 特别地, 对每个博弈 $v \in \mathrm{CMC}^{N,m}$, 等分离集合 $\mathrm{ESOS}(v)$ 只包含一个元素, 这个元素就是博弈 v 的受限平等解 $d(v)$. 这个结果的证明用到了引理 5.27 和定理 5.28.

12.3　多选择宗族博弈

12.3.1　基本描述

这一节介绍一种新的多选择博弈类, 称之为多选择宗族博弈. 在传统的宗族博弈模型中 (参见第 5.3 节), 参与者集合包含两个不相交的群体, 一个固定的 (有权的) 宗族, 满足 "是或否" 选择, 以及一群 (无权的) 非宗族成员. 但是, 在多选择宗族博弈中, 非宗族成员可能有更多的合作选择. 特别地, 每个非宗族成员可以在给定的有限集上选择任何参与水平, 然而, 每个宗族成员可以或者参与, 或者放弃合

作. 但是, 在任何包含宗族成员和至少包含一个非宗族成员的联盟中, 所有宗族成员的参与 (即参与水平为 1), 是产生一个正的奖励的必要条件.

令 $N=(N\backslash C,C)$ 是参与者集合, 其中 C 代表宗族, $N\backslash C$ 代表非宗族成员的群体. 为了进一步的应用, 令 $\mathcal{M}^{N,C}$ 表示具有参与者集合 N 和固定的宗族 C 的多选择联盟. 对每个 $s\in\mathcal{M}^{N,C}$, 用 $s_{N\backslash C}$ 和 s_C 分别表示 s 在 $N\backslash C$ 和 C 上的限制. 注意, 在一个多选择宗族博弈中, 最大参与状态具有形式 $m=\left(m_{N\backslash C},1_C\right)$.

我们也用 $\mathcal{M}^{N,1_C}$ 表示满足 $s_C=1_C$ 的多选择联盟 $s\in\mathcal{M}^{N,C}$ 的集合, 在这些联盟中, 所有的宗族成员完全参与, 也用记号 $\mathcal{M}_+^{N,1_C}=\mathcal{M}^{N,1_C}\backslash\{0\}$. 这里定义的多选择宗族博弈, 用到了宗族成员的否决权、特征函数的单调性, 以及在包含至少所有宗族成员在参与水平 1 的多选择联盟中的关于非宗族成员的参与 (水平) 的联合性.

定义 12.26 博弈 $\langle N,\left(m_{N\backslash C},1_C\right),v\rangle$ 是一个**多选择宗族博弈**, 如果它的特征函数 $v:\mathcal{M}^{N,C}\to\mathbb{R}$ 满足

(i) 宗族性: 如果 $s_C\neq 1_C$, 那么 $v(s)=0$;

(ii) 单调性: 对所有满足 $s\leqslant t$ 的 $s,t\in\mathcal{M}^{N,C}$, 都有 $v(s)\leqslant v(t)$;

(iii) (水平) 联合性: 对每个 $s\in\mathcal{M}^{N,1_C}$,

$$v(m)-v(s)\geqslant\sum_{i\in N\backslash C}w_{is_i^+}(m,v),$$

其中, 对每个 $i\in N\backslash C$, $w_{is_i^+}(m,v)$ 表示参与者 i 的所对应水平的边际贡献, 这些水平是高于 i 在 s 中的参与水平.

后面仅用 v 代替 $\langle N,\left(m_{N\backslash C},1_C\right),v\rangle$. 为了进一步应用, 用 $\mathrm{MC}_C^{N,m}$ 表示多选择博弈的集合, 其中的博弈具有固定的非空有限的参与者集合 N、固定的非空宗族 C, 以及最大参与状态 m. 注意到, $\mathrm{MC}_C^{N,m}$ 是 $\mathrm{MC}^{N,m}$ 中的凸包, 即对所有的 $v,w\in\mathrm{MC}_C^{N,m}$, 以及对所有的 $p,q\in\mathbb{R}_+$, 有 $pv+qw\in\mathrm{MC}_C^{N,m}$, 其中 $\mathbb{R}_+$ 表示非负实数的集合.

下个定理清楚地给出了多选择宗族博弈核心的描述.

定理 12.27 令 $v\in\mathrm{MC}_C^{N,m}$, 那么

$$C(v)=\Bigg\{x:M\to\mathbb{R}_+\Bigg|X(m)=v(m);$$
$$\sum_{k=j}^{m_i}x_{ik}\leqslant v(m)-v\left(m_{-i},j-1\right),\forall i\in N\backslash C,j\in M_i^+\Bigg\}.$$

证明 我们用 $B(v)$ 表示上面等式中右端项集合. 首先证明 $C(v)\subset B(v)$. 令 $v\in\mathrm{MC}_C^{N,m}$, $x\in C(v)$. 注意 x 的非负性来源于宗族性和单调性; 因此, 对所有的 $i\in N$ 和 $j\in M_i^+$, 都有 $x_{ij}\geqslant 0$. 显然, 有效性条件是满足的. 为了证明对每

个非宗族成员的每个最高水平的累积支付的上界性, 首先注意到, 每个多选择联盟 $\tilde{s}=(m_{-i},j-1)\in\mathcal{M}^{N,1_C}$, $i\in N\backslash C$, $j\in\{1,\cdots,m_i\}$ 的支付可以表示为

$$X\left(\tilde{s}\right)=X(m)-\sum_{k=j}^{m_i}x_{ik}=v(m)-\sum_{k=j}^{m_i}x_{ik},$$

其中, 第二个等式来源于 x 的有效性.

现在, 稳定性条件 $X\left(\tilde{s}\right)\geqslant v\left(\tilde{s}\right)$ 蕴含

$$v(m)-\sum_{k=j}^{m_i}x_{ik}\geqslant v\left(m_{-i},j-1\right),$$

或者, 等价地

$$\sum_{k=j}^{m_i}x_{ik}\leqslant v(m)-v\left(m_{-i},j-1\right).$$

因此, $x\in B(v)$.

现在, 证明逆包含关系. 令 $x\in B(v)$, x 的水平增加合理性来源于宗族性, 由于对所有的 $i\in N$ 和 $j\in M_i^+$, 都有 $x_{ij}\geqslant 0=v\left(0_{-i},j\right)-v\left(0_{-i},j-1\right)$. 我们仅仅需要证明, 对每个 $s\in\mathcal{M}^{N,C}$, 都有 $X(s)\geqslant v(s)$.

显然, 对每个满足 $s_C\neq 1_C$ 的 $s\in\mathcal{M}^{N,C}$ 有, 由宗族性, $X(s)=\sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{s_i}x_{ij}\geqslant 0=v(s)$.

现在考虑满足 $s_C=1_C$ 的多选择联盟 $s\in\mathcal{M}^{N,C}$ 的稳定性条件.

由 (水平) 联合性, 得到

$$v(m)-v(s)\geqslant\sum_{i\in N\backslash C}w_{is_i^+}\left(m,v\right).$$

进一步地,

$$X(s)+\sum_{i\in N\backslash C}\sum_{k=s_i+1}^{m_i}x_{ik}-v(s)=X(m)-v(s)=v(m)-v(s)\geqslant\sum_{i\in N\backslash C}w_{is_i^+}\left(m,v\right)$$

蕴含

$$X(s)\geqslant v(s)+\sum_{i\in N\backslash C}\left(w_{is_i^+}\left(m,v\right)-\sum_{k=s_i+1}^{m_i}x_{ik}\right).$$

注意到, 由于 $x\in B(v)$, 对每个 $i\in N\backslash C$, $w_{is_i^+}\left(m,v\right)=v(m)-(m_{-i},s_i)\geqslant\sum_{k=s_i+1}^{m_i}x_{ik}$,

因此得到, 对每个 $i\in N\backslash C$, $w_{is_i^+}\left(m,v\right)-\sum_{k=s_i+1}^{m_i}x_{ik}\geqslant 0$. 所以, 对每个 $s\in\mathcal{M}^{N,1_C}$, $X(s)\geqslant v(s)$.

推论 12.28 令 $v \in \mathrm{MC}_C^{N,m}$, $t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$. 如果子博弈 v_t 是一个宗族博弈, 那么它的核心由下式描述

$$C(v_t) = \Big\{x : M^t \to \mathbb{R}_+ \Big| X(t) = v(t);$$

$$\sum_{k=j}^{t_i} x_{ik} \leqslant v(t) - v(t_{-i}, j-1), \forall i \in \operatorname{car}(t_{N\backslash C}), j \in M_i^t\Big\},$$

其中, $M_i^t = \{1, \cdots, t_i\}$, $M^t = \{(i,j) | i \in \operatorname{car}(t), j \in M_i^t\}$.

证明 考虑到 $t = (t_{N\backslash C}, 1_C)$ 作为 v_t 的 "大联盟", 此推论可以直接由定理 12.27 得到.

当多选择宗族博弈的宗族仅含有一个参与者时, 称其为多选择大老板博弈; 注意到, 在 $m_{N\backslash C} = 1_{N\backslash C}$ 时, 这些博弈是如文献 [27] 所描述的大老板博弈. 多选择宗族博弈的模型, 当宗族含有至少两个成员时, 是宗族博弈模型的推广[122].

在这一节的其余部分, 我们将注意力放在具有多选择联盟的完全宗族博弈上.

定义 12.29 博弈 $v \in \mathrm{MC}_C^{N,m}$ 称为具有宗族 C 的**多选择完全宗族博弈**, 如果它的所有子博弈 v_t $(t \in \mathcal{M}^{N,1_C})$ 是具有宗族 C 的宗族博弈.

用 $\mathrm{TMC}_C^{N,m}$ 表示所有多选择完全宗族博弈 $v \in \mathrm{MC}_C^{N,m}$ 的集合.

下个定理提供了多选择完全宗族博弈的一个描述.

定理 12.30 令 $v \in \mathrm{MC}^{N,m}$, $C \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$ 满足 $m_C = 1_C$. 那么下列断言是等价的:

(i) $v \in \mathrm{TMC}_C^{N,m}$;

(ii) v 是单调的, 每个参与者 $i \in C$ 是否决参与者, 对所有满足 $s \leqslant t$ 的 $s, t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$, 有

$$v(t) - v(s) \geqslant \sum_{i \in \operatorname{car}(t_{N\backslash C})} w_{is_i^+}(t, v); \tag{12.18}$$

(iii) v 是单调的, 每个参与者 $i \in C$ 是否决参与者, 对所有 $i \in \operatorname{car}(s_{N\backslash C})$, 及所有满足 $s \leqslant t$ 和 $s_i = t_i$ 的 $s, t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$, 有

$$v(t) - v(t - e^i) \leqslant v(s) - v(s - e^i). \tag{12.19}$$

证明 (i)⇔(ii) 关系 (12.18) 简单地给出了多选择子博弈的 (水平) 联合性质. 因此, 称关系 (12.18) 为 v 的完全 (水平) 联合性.

(ii)⇒(iii) 只需证明 (12.18)⇒(12.19). 注意 (12.19) 中的不等式表示 v 的完全凹性, 它反映出这个事实, 在包含所有宗族成员具有参与水平为 1 的联盟中非宗族成员的减少相同的单位水平, 在较小的联盟中的利益比较大联盟中的利益更多, 其中非宗族成员有相同的参与水平. 令 $s \in \mathcal{M}^{N,1_C}$, $i \in \operatorname{car}(s_{N\backslash C})$. 考虑联盟 $s + \varepsilon^k$,

它是从联盟 s 中将第 k 个非宗族成员的参与水平增加一个单位时得到的. 首先证明

$$w_{is_i}(s,v) \geqslant w_{is_i}\left(s+e^k,v\right). \tag{12.20}$$

$$\begin{aligned}&w_{is_i}(s,v)+w_{k,s_k+1}\left(s+e^k,v\right)\\=&\left(v(s)-v\left(s_{-i},s_i-1\right)\right)+\left(v\left(s+e^k\right)-v\left(s_{-k},s_k\right)\right)\\=&v\left(s+e^k\right)-v\left(s_{-i},s_i-1\right).\end{aligned} \tag{12.21}$$

完全联合性质 (由 $s+e^k$ 取代 t 及 (s_{-i},s_i-1) 取代 s) 给出

$$v\left(s+e^k\right)-v\left(s_{-i},s_i-1\right) \geqslant w_{is_i}\left(s+e^k,v\right)+w_{k,s_k+1}\left(s+e^k,v\right). \tag{12.22}$$

由 (12.21) 式和 (12.22) 式得到 (12.20) 式的结论是正确的. 用 $\{i_1,\cdots,i_q\}$ 表示包含在 t 中但是不包含在 s 中的水平集合. 重复应用 (12.20) 式得到

$$w_{is_i}(s,v) \geqslant w_{is_i}\left(s+e^{i_1},v\right) \geqslant \cdots \geqslant w_{is_i}\left(s+\left(e^{i_1}+\cdots+e^{i_q}\right),v\right)=w_{is_i}(t,v).$$

因此, 完全凹性 (12.19) 式成立.

(iii)⇒(ii) 仅需证明 (12.19)⇒(12.18). 令 $s,t\in\mathcal{M}^{N,1_C}$ 满足 $s\leqslant t$, 用 $\{i_1,\cdots,i_q\}$ 表示包含在 t 中但是不包含在 s 中的水平的集合. 那么,

$$\begin{aligned}v(t)-v(s)&=\sum_{i\in\operatorname{car}\left(t_{N\setminus C}\right)}\sum_{k=1}^{q}w_{i,i_k}\left(s+\left(e^{i_1}+\cdots+e^{i_k}\right),v\right)\\&\geqslant\sum_{i\in\operatorname{car}\left(t_{N\setminus C}\right)}\sum_{k=1}^{q}w_{i,i_k}(t,v)=\sum_{i\in\operatorname{car}\left(t_{N\setminus C}\right)}w_{is_i^+}(t,v).\end{aligned}$$

因此, 完全联合性 (12.18) 式成立.

12.3.2　双单调分配机制

多选择博弈的水平增加单调分配机制 (limas) 的概念是最近在文献 [28] 中引进的, 其中也证明了博弈的凸性是 limas 存在的充分条件. 文献 [27] 和 [122] 研究的是完全大老板博弈和宗族博弈的双单调分配机制的存在性, 受其启发, 现在我们集中研究多选择完全宗族博弈的双 (水平增加) 单调分配机制 (bi-(level-increase) monotonic allocation schemes, bi-limas).

定义 12.31　令 $v\in\mathrm{TMC}_C^{N,m}$, $t\in\mathcal{M}^{N,1_C}$. 机制 $\left[a_{ij}^t\right]_{i\in N,j\in M_i^t}^{t\in\mathcal{M}^{N,1_C}}$, 其中 $M_i^t=\{1,\cdots,t_i\}$, 称为是一个**双 (水平增加) 单调分配机制** (bi-limas), 如果下列两个条件成立.

(i) 稳定性: 对所有的 $t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$, $a^t \in C(v_t)$.

(ii) 关于一单位水平增加的双单调性: 对所有满足 $s \leqslant t$ 的 $s, t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$, 有

(ii.1) 对每个 $i \in C$, 有 $a_{i1}^s \leqslant a_{i1}^t$;

(ii.2) 对每个 $i \in \operatorname{car}(s_{N\setminus C})$ 和每个 $j \in \{1, \cdots, s_i\}$, 有 $a_{ij}^s \geqslant a_{ij}^t$.

我们通过已定义的补偿–分享规则来研究多选择 (完全) 宗族博弈类的这种双单调分配机制.

定义 12.32 令 $N\setminus C = \{1, \cdots, q\}$, $C = \{q+1, \cdots, n\}$. 对每个 $\alpha \in [0,1]^q$ 以及 $\beta \in \Delta(C) = \Delta(\{q+1, \cdots, n\}) = \left\{ z_+^{n-q} \middle| \sum_{i=q+1}^{n} z_i = 1 \right\}$, 基于 α 和 β 的**补偿–分享规则** $\psi^{\alpha,\beta} : \mathrm{MC}_C^{N,m} \to \mathbb{R}^{M^+}$ 定义为, 对每个 $i \in N$, $j \in M_i^+$,

$$\psi_{ij}^{\alpha,\beta}(v) = \begin{cases} \alpha_i \left(v(m) - v(m_{-i}, 0)\right), & \text{如果 } i \in N\setminus C, j = 1, \\ 0, & \text{如果 } i \in N\setminus C, j \in M_i^+ \setminus \{1\}, \\ \beta_i \left[v(m) - \sum\limits_{j \in N\setminus C} \alpha_j \left(v(m) - v(m_{-j}, 0)\right) \right], & \text{如果 } i \in C, j = 1 . \end{cases}$$

补偿向量 α 的第 i 个分量表明非宗族成员 i 的水平 1 上作为支付得到的, 这个参与者对大联盟 m 的边际贡献的部分 $\alpha_i w_i(m, v)$, 是按照它的多选择合作的角色来决定. 那么, 剩余的, $v(m) - \sum\limits_{j \in N\setminus C} \alpha_j w_j(m, v)$, 是在宗族成员中分配. 对于每个宗族成员 i, 分享向量 β 的第 i 个分量 β_i 决定其份额 $\beta_i \left[v(m) - \sum\limits_{j \in N\setminus C} \alpha_j w_j(m, v) \right]$.

定理 12.33 令 $\mathrm{MC}_C^{N,m}$ 是具有宗族 C 的多选择宗族博弈的锥, 那么

(i) 对每个 $\alpha \in [0,1]^{N\setminus C}$ 以及每个 $\beta \in \Delta(C)$, $\psi^{\alpha,\beta}$ 是可加的;

(ii) $\psi^{\alpha,\beta}$ 是稳定的, 即对每个 $v \in \mathrm{MC}_C^{N,m}$, $\psi^{\alpha,\beta}(v) \in C(v)$.

证明 (i) 令 $\alpha \in [0,1]^{N\setminus C}$ 以及 $\beta \in \Delta(C)$. 对所有的 $v, w \in \mathrm{MC}_C^{N,m}$, 以及 $p, q \in \mathbb{R}_+$, 有

$$\psi^{\alpha,\beta}(pv + qw) = p\psi^{\alpha,\beta}(v) + q\psi^{\alpha,\beta}(w).$$

因此, $\psi^{\alpha,\beta}$ 在多选择宗族博弈的锥上是可加的.

(ii) 令 $v \in \mathrm{MC}_C^{N,m}$, 由定理 12.27 以及 $\sum\limits_{i \in C} \beta_i = 1$, 得到 $\psi^{\alpha,\beta}(v) \in C(v)$.

定理 12.36 要证明, 补偿–分享规则族 $\psi^{\alpha,\beta}$, 在多选择完全宗族博弈的一个子类上的 bi-limas 的存在性问题上, 扮演着非常关键的角色. 首先需要一些辅助结果.

引理 12.34　令 $v \in \mathrm{TMC}_C^{N,m}$, $s, t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$ 满足 $s \leqslant t$. 那么

$$v(t) - v(s) \geqslant \sum_{i \in \operatorname{car}\left((t-s)_{N \backslash C}\right)} w_i(t, v).$$

证明　注意, $s \leqslant t$ 蕴含 $\operatorname{car}(s_{N\backslash C}) \subset \operatorname{car}(t_{N\backslash C})$. 用 $\operatorname{car}\left((t-s)_{N\backslash C}\right)$ 表示 $\operatorname{car}(t_{N\backslash C}) - \operatorname{car}(s_{N\backslash C})$. 由完全 (水平) 联合性, 得到

$$\begin{aligned}
v(t) - v(s) &\geqslant \sum_{i \in \operatorname{car}(t_{N\backslash C})} w_{is_i^+}(t, v) \\
&= \sum_{i \in \operatorname{car}(s_{N\backslash C})} w_{is_i^+}(t, v) + \sum_{i \in \operatorname{car}\left((t-s)_{N\backslash C}\right)} w_{i0^+}(t, v) \\
&= \sum_{i \in \operatorname{car}(s_{N\backslash C})} \left(v(t) - v(t_{-i}, s_i)\right) + \sum_{i \in \operatorname{car}\left((t-s)_{N\backslash C}\right)} w_{is_i^+}(t, v) \\
&\geqslant \sum_{i \in \operatorname{car}\left((t-s)_{N\backslash C}\right)} w_{is_i^+}(t, v),
\end{aligned}$$

其中, 最后一个不等式成立是因为, 由 v 的单调性, 对每个 $i \in \operatorname{car}(s_{N\backslash C})$, $v(t) - v(t_{-i}, s_i) \geqslant 0$.

引理 12.35　令 $v \in \mathrm{TMC}_C^{N,m}$, $s, t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$ 满足 $s \leqslant t$. 那么

$$v(t) - v(s) - \sum_{i \in \operatorname{car}\left((t-s)_{N\backslash C}\right)} \alpha_i w_i(t, v) \geqslant 0.$$

证明　首先, 对每个 $i \in N\backslash C$ 和 $t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$, 由 α_i 和 $w_i(t, v)$ 的非负性, 以及 $\alpha_i \leqslant 1$, 有 $\alpha_i w_i(t, v) \leqslant w_i(t, v)$, 蕴含

$$\sum_{i \in \operatorname{car}\left((t-s)_{N\backslash C}\right)} \alpha_i w_i(t, v) \geqslant - \sum_{i \in \operatorname{car}\left((t-s)_{N\backslash C}\right)} w_i(t, v).$$

其次, 由引理 12.34, 有

$$v(t) - v(s) - \sum_{i \in \operatorname{car}\left((t-s)_{N\backslash C}\right)} w_i(t, v) \geqslant 0.$$

因此,

$$v(t) - v(s) - \sum_{i \in \operatorname{car}\left((t-s)_{N\backslash C}\right)} \alpha_i w_i(t, v) \geqslant v(t) - v(s) - \sum_{i \in \operatorname{car}\left((t-s)_{N\backslash C}\right)} w_i(t, v) \geqslant 0.$$

结果是, 在多选择完全宗族博弈的一个子类上, 满足 $\alpha \in [0,1]^{N\backslash C}$ 以及 $\beta \in \Delta(C)$ 的补偿-分享规则 $\psi^{\alpha,\beta}$ 产生一个双 (水平增加) 单调分配机制.

定理 12.36 　令 $v \in \mathrm{TMC}_C^{N,m}$ 满足对每对 $s \leqslant t$ 的 $s,t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$, 以及每个 $i \in \mathrm{car}\left(s_{N\backslash C}\right)$, 有

$$v(t) - v\left(t_{-i}, 0\right) \leqslant v(s) - v\left(s_{-i}, 0\right). \tag{12.23}$$

那么, 对每个 $\alpha \in [0,1]^{N\backslash C}$ 以及 $\beta \in \Delta(C)$, 补偿-分享规则 $\psi^{\alpha,\beta}$ 产生一个 v 的 bi-limas, 即

$$\left[\psi_{ij}^{\alpha,\beta}\left(v_t\right)\right]_{i\in N, j\in M_i^t}^{t\in\mathcal{M}^{N,1_C}}.$$

证明 　令 $\alpha \in [0,1]^{N\backslash C}$, $\beta \in \Delta(C)$. 对每个 $t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$, 在子博弈 v_t 中, 对每个非宗族成员 $i \in \mathrm{car}\left(s_{N\backslash C}\right)$, 基于 α 的补偿 (不考虑 β) $\alpha_i w_i(t,v)$ 是作为支付完全赋予给参与水平为 1 的参与者. 因此, 对每个非宗族成员 $i \in \mathrm{car}\left(s_{N\backslash C}\right)$ 的每个其他水平的基于 α 的补偿仅等于 0. 留下的对宗族的总量, $v(t) - \sum\limits_{j\in\mathrm{car}\left(t_{N\backslash C}\right)} \alpha_j w_j(t,v)$, 是基于 β 分享的. 对每个宗族成员 $i \in C$, 在子博弈 v_t 中的基于 β 的分享是 $\beta_i\left[v(t) - \sum\limits_{j\in\mathrm{car}\left(t_{N\backslash C}\right)} \alpha_j w_j(t,v)\right]$, 其中 $\sum\limits_{i\in C}\beta_i = 1$.

由于 v_t 是一个宗族博弈, 由定理 12.33 (ii) 和推论 12.28 有, $\psi^{\alpha,\beta}\left(v_t\right) \in C\left(v_t\right)$.

现在将注意力放在双单调性上. 令 $s,t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$ 满足 $s \leqslant t$. 首先证明, 对每个参与者 $i \in \mathrm{car}\left(s_{N\backslash C}\right)$ 和每个水平 $j \in \{1,\cdots,s_i\}$, 补偿 $\psi_{ij}^{\alpha,\beta}\left(v_s\right)$ 比补偿 $\psi_{ij}^{\alpha,\beta}\left(v_t\right)$ 弱好. 显然, 对 $k \in \{2,\cdots,s_i\}$, $\psi_{ik}^{\alpha,\beta}\left(v_s\right) = 0 = \psi_{ik}^{\alpha,\beta}\left(v_t\right)$. 进一步, 由 (12.23) 式和 α_i 的非负性, 得到, 对每个 $i \in \mathrm{car}\left(s_{N\backslash C}\right)$, $\psi_{i1}^{\alpha,\beta}\left(v_s\right) = \alpha_i w_i(s,v) \geqslant \alpha_i w_i(t,v) = \psi_{i1}^{\alpha,\beta}\left(v_t\right)$.

接下来考虑宗族成员的分享来处理单调性条件. 用 $R_\alpha\left(v_t\right)$ 表示多选择博弈 v_t 在 “大联盟” $\left(t_{N\backslash C}, 1_C\right)$ 中对宗族成员的基于 α 的剩余量. 首先证明, 对每个满足 $s \leqslant t$ 的 $s,t \in \mathcal{M}^{N,1_C}$,

$$R_\alpha\left(v_t\right) \geqslant R_\alpha\left(v_s\right). \tag{12.24}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&R_\alpha\left(v_t\right) - R_\alpha\left(v_s\right)\\
&= \left(v(t) - \sum_{i\in\mathrm{car}\left(t_{N\backslash C}\right)} \alpha_i w_i(t,v)\right) - \left(v(s) - \sum_{i\in\mathrm{car}\left(s_{N\backslash C}\right)} \alpha_i w_i(s,v)\right)
\end{aligned}$$

$$=\left(v(t)-v(s)-\sum_{i\in\mathrm{car}\left((t-s)_{N\setminus C}\right)}\alpha_i w_i(t,v)\right)+\sum_{i\in\mathrm{car}\left(s_{N\setminus C}\right)}\alpha_i\left(w_i(s,v)-w_i(t,v)\right)$$

$$\geqslant v(t)-v(s)-\sum_{i\in\mathrm{car}\left((t-s)_{N\setminus C}\right)}\alpha_i w_i(t,v)\geqslant 0,$$

其中, 第一个不等式来源于 (12.23) 式和 α_i 的非负性, 最后一个不等式来源于引理 12.35.

因此, 关系 (12.24) 成立. 现在, 由 β_i 的非负性和 (12.24) 式得, 对每个 $i\in C$, $\psi_{i1}^{\alpha,\beta}(v_t)\geqslant\psi_{i1}^{\alpha,\beta}(v_s)$.

注释 12.37　令 $v\in\mathrm{TMC}_C^{N,m}$, $s,t\in\mathcal{M}^{N,1_C}$ 满足 $s\leqslant t$. 那么, 对每个满足 $s_i=t_i$ 的 $i\in\mathrm{car}\left(s_{N\setminus C}\right)$, 有

$$w_i(t,v)\leqslant w_i(s,v).\tag{12.25}$$

证明　令 $s,t\in\mathcal{M}^{N,1_C}$ 满足 $s\leqslant t$, $i\in\mathrm{car}\left(s_{N\setminus C}\right)$ 满足 $s_i=t_i$. 重复应用完全凹性得到

$$v(t_{-i},s_i)-v(t_{-i},s_i-1)\leqslant v(s_{-i},s_i)-v(s_{-i},s_i-1),$$

$$\cdots\cdots$$

$$v(t_{-i},1)-v(t_{-i},0)\leqslant v(s_{-i},1)-v(s_{-i},0).$$

将这些不等式相加得, $v(t)-v(t_{-i},0)\leqslant v(s)-v(s_{-i},0)$, 因此, (12.25) 式成立.

对任意的多选择完全宗族博弈, bi-limas 不一定存在, 即使考虑比 bi-limas 弱的情况也是一样的, 在这个较弱版本中, 有关非宗族成员 (水平) 单调性条件定义为对所有的满足 $s\leqslant t$ 的 $s,t\in\mathcal{M}^{N,1_C}$, 对每个满足 $s_i=t_i$ 的 $i\in\mathrm{car}\left(s_{N\setminus C}\right)$, 以及 $j\in\{1,\cdots,s_i\}$, 有 $a_{ij}^s\geqslant a_{ij}^t$ 成立.

因此, 由注释 12.37, 如上定义的对非宗族成员的 (水平) 单调性条件成立. 然而, 对宗族成员的 (水平) 单调性条件不一定成立, 因为, 在大的子博弈 v_t 中对宗族的剩余量比在小的子博弈 v_t 中对宗族的剩余量要小.

定义 12.38　令 $v\in\mathrm{TMC}_C^{N,m}$, (水平) 支付向量 $b\in C(v)$ 是 **bi-limas 扩展**, 如果存在一个 bi-limas$\left[a_{ij}^t\right]_{i\in N,j\in M_i^t}^{t\in\mathcal{M}^{N,1_C}}$, 使得对每个 $i\in N$ 和 $j\in M_i^+$, 有 $b_{ij}=a_{ij}^m$.

定理 12.39　令 $v\in\mathrm{TMC}_C^{N,m}$ 满足对所有具有 $s\leqslant t$ 的 $s,t\in\mathcal{M}^{N,1_C}$ 和每个 $i\in\mathrm{car}\left(s_{N\setminus C}\right)$, 不等式 (12.23) 成立. 那么存在一个 (水平) 支付向量 $b\in C(v)$, 它是 bi-limas 扩展.

证明　由定理 12.27, 每个 (水平) 支付向量 $b\in C(v)$ 具有形式

$$b_{ij}=\begin{cases}\alpha_{im_i}\left(v(m)-v\left(m_{-i},m_i-1\right)\right), & \text{如果 } i\in N\backslash C, j=m_i,\\ \alpha_{ij}\left(v\left(m_{-i},j\right)-v\left(m_{-i},j-1\right)\right) & \\ -\alpha_{i,j+1}\left(v\left(m_{-i},j+1\right)-v\left(m_{-i},j\right)\right), & \text{如果 } i\in N\backslash C, j\in M_i^+\backslash\{m_i\},\\ \beta_i\left[v(m)-\sum\limits_{i\in N\backslash C}\alpha_{i1}\left(v(m)-v\left(m_{-i},0\right)\right)\right], & \text{如果 } i\in C, j=1,\end{cases}$$

其中, 对每个 $i\in N\backslash C$ 和 $j\in M_i^+$, 有 $\alpha_{ij}\in[0,1]$, 以及 $\beta\in\Delta(C)$; 即对每个 $i\in C$ 和 $\sum\limits_{i\in C}\beta_i=1$, 有 $\beta_i\geqslant 0$.

考虑特殊矩阵 $\alpha=(\alpha_{ij})_{i\in N\backslash C,j\in M_i^+}$, 其中对每个 $i\in N\backslash C$ 和每个 $j\in M_i^+\backslash\{1\}$ 有 $\alpha_{ij}=0$. 用 $\tilde{\alpha}$ 表示 $(\alpha_{i1})_{i\in N\backslash C}$. 考虑对应于 $\tilde{\alpha}$ 和 β 的核心元素 $\tilde{b}\in C(v)$. 注意, $\tilde{b}=\psi^{\alpha,\beta}(v)$. 对每个 $s\in\mathcal{M}^{N,1_C}$, 每个 $i\in\operatorname{car}\left(s_{N\backslash C}\right)$, 和每个 $j\in M_i^s$, 定义

$$a_{ij}^s=\begin{cases}\alpha_{i1}\left(v(s)-v\left(s_{-i},0\right)\right), & \text{如果 } i\in\operatorname{car}\left(s_{N\backslash C}\right), j=1,\\ 0, & \text{如果 } i\in\operatorname{car}\left(s_{N\backslash C}\right), j\in\{2,\cdots,s_i\},\\ \beta_i\left[v(s)-\sum\limits_{k\in N\backslash C}\alpha_{k1}\left(v(s)-v\left(s_{-k},0\right)\right)\right], & \text{如果 } i\in C, j=1.\end{cases}$$

由定理 12.27, $\left[a_{ij}^s\right]_{i\in N\backslash C,j\in M_i^+}^{s\in\mathcal{M}^{N,1_C}}$ 是一个 bi-limas. 现在, 注意对每个 $i\in N\backslash C$ 和每个 $j\in M_i^+$, $\tilde{b}_{ij}=a_{ij}^m$. 因此, $\tilde{b}$ 是一个 bi-limas 扩展.

显然, 在 $m_{N\backslash C}=1_{N\backslash C}$ 的情况下, bi-limas 与 bi-mas 是一致的, 因此, 在定理 12.36 中考虑的多选择完全宗族博弈的子博弈与传统的完全宗族博弈类是一致的. 所以, 定理 12.39 表明, 在这种情况下, 多选择完全宗族博弈的每个核心元素都可以推广到一个 bi-mas.

参考文献

[1] Arin, J. and V. Feltkamp (2002): Lorenz undominated allocations for TU-games: The weighted coalitional Lorenz solutions, Social Choice and Welfare 19, 869–884.

[2] Arin, J. and E. Inarra (2001): Egalitarian solutions in the core, International Journal of Game Theory 30, 187–193.

[3] Arin, J. and E. Inarra (2002): Egalitarian sets for TU-games, International Game Theory Review 4, 183–199.

[4] Aubin, J.P. (1974): Coeur et valeur des jeux flous à paiements latéraux, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris 279 A, 891–894.

[5] Aubin, J.P. (1981): Cooperative fuzzy games, Mathematics of Operations Research 6, 1–13.

[6] Aubin, J.P. (1982): Mathematical Methods of Game and Economic Theory, North-Holland, Amsterdam.

[7] Aumann, R. and L. Shapley (1974): Values of Non-atomic Games, Princeton University Press, Princeton.

[8] Azrieli, Y. and E. Lehrer (2005): Extendable cooperative games, Journal of Public Economic Theory, forthcoming.

[9] Azrieli, Y. and E. Lehrer (2006): On some families of cooperative fuzzy games, International Journal of Game Theory, forthcoming.

[10] Azrieli, Y. and E. Lehrer (2007): Market games in large economies with a finite number of types, Economic Theory 31, 327–342.

[11] Bennett, E. and M. Wooders (1979): Income distribution and firm formation, Journal of Comparative Economics 3, 304–317.

[12] Bergantiños, G. and J. Massó (1996): Notes on a new compromise value: The χ-value, Optimization 38, 277–286.

[13] Bhattacharya, A. (2004): On the equal division core, Social Choice and Welfare 22, 391–399.

[14] Billot, A. (1995): Economic Theory of Fuzzy Equilibria, Springer-Verlag, Heidelberg.

[15] Biswas, A., T. Parthasarathy, J. Potters, and M. Voorneveld (1999): Large cores and exactness, Games and Economic Behavior 28, 1–12.

[16] Bondareva, O.N. (1963): Certain applications of the methods of linear programming to the theory of cooperative games, Problemy Kibernetiki 10, 119–139 (in Russian).

[17] Branzei, R., D. Dimitrov, and S. Tijs (2003): Convex fuzzy games and participation

monotonic allocation schemes, Fuzzy Sets and Systems 139, 267–281.

[18] Branzei, R., D. Dimitrov, and S. Tijs (2004): Egalitarianism in convex fuzzy games, Mathematical Social Sciences 47, 313–325.

[19] Branzei, R., D. Dimitrov, and S. Tijs (2004): Hypercubes and compromise values for cooperative fuzzy games, European Journal of Operational Research 155, 733–740.

[20] Branzei, R., D. Dimitrov, and S. Tijs (2004): A new characterization of convex games, CentER Discussion Paper 2004–109, Tilburg University.

[21] Branzei, R., D. Dimitrov, and S. Tijs (2006): The equal split-off set for cooperative games, Banach Center Publications 71, 39–46.

[22] Branzei, R., D. Dimitrov, and S. Tijs (2006): Convex games versus clan games, CentER Discussion Paper 2006–58, Tilburg University.

[23] Branzei, R., N. Llorca, J. Sánchez-Soriano, and S. Tijs (2007): Egalitarianism in multi-choice games, CentER Discussion Paper 2007–55, Tilburg University.

[24] Branzei, R., N. Llorca, J. Sánchez-Soriano, and S. Tijs (2007): Multichoice total clan games: characterizations and solution concepts, CentER Discussion Paper 2007–77, Tilburg University.

[25] Branzei, R. and S. Tijs (2001): Additivity regions for solutions in cooperative game theory, Libertas Mathematica XXI, 155–167.

[26] Branzei, R. and S. Tijs (2001): Cooperative games with a simplicial core, Balkan Journal of Geometry and its Applications 6, 7–15.

[27] Branzei, R., S. Tijs, and J. Timmer (2001): Information collecting situations and bi-monotonic allocation schemes, Mathematical Methods of Operations Research 54, 303–313.

[28] Branzei, R., S. Tijs, and J. Zarzuelo (2007): Convex multi-choice cooperative games and their monotonic allocation schemes, CentER Discussion Paper 2007–54, Tilburg University.

[29] Brink, van den, R. (1994): A note on the τ-value and τ-related solution concepts, FEW Research Memorandum 652, Tilburg University, The Netherlands.

[30] Brink, van den, R. (2002): A comment on the χ-value, Mimeo, Tilburg University, The Netherlands.

[31] Butnariu, D. and E.P. Klement (1993): Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[32] Calvo, E., E. Gutiérrez, and J.C. Santos (2000): The multichoice consistent value, International Journal of Game Theory 29, 177–188.

[33] Calvo, E. and J.C. Santos (2000): A value for multichoice games, Mathematical Social Sciences 40, 341–354.

[34] Calvo, E. and J.C. Santos (2001): A value for mixed action-set games, International Journal of Game Theory 30, 61–78.

[35] Choquet, G. (1953/54): Theory of capacities, Annales de l'Institut Fourier 5, 131–295.

[36] Curiel, I. (1997): Cooperative Game Theory and Applications: Cooperative Games Arising from Combinatorial Optimization Problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[37] Curiel, I. and S. Tijs (1991): The minimarg and the maximarg operators, Journal of Optimization Theory and Applications 71, 277–287.

[38] Derks, J. (1992): A short proof of the inclusion of the core in the Weber set, International Journal of Game Theory 21, 149—150.

[39] Derks, J. and J. Kuipers (2002): On the number of extreme points of the core of a transferable utility game, in: P. Borm and H. Peters (Eds.), Chapters in Game Theory. In Honor of Stef Tijs, Kluwer Academic Publishers, pp. 83–97.

[40] Derks, J. and H. Peters (1993): A Shapley value for games with restricted coalitions, International Journal of Game Theory 21, 351–360.

[41] Dragan, I., J. Potters, and S. Tijs (1989): Superadditivity for solutions of coalitional games, Libertas Mathematica 9, 101–110.

[42] Driessen, T. (1988): Cooperative Games, Solutions and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[43] Driessen, T. and S. Tijs (1983): The τ-value, the nucleous and the core of a subclass of games, Methods of Operations Research 46, 395–406.

[44] Driessen, T. and S. Tijs (1985): The τ-value, the core and semiconvex games, International Journal of Game Theory 14, 229–247.

[45] Dutta, B. (1990): The egalitarian solution and reduced game properties in convex games, International Journal of Game Theory 19, 153–169.

[46] Dutta, B. and D. Ray (1989): A concept of egalitarianism under participation constraints, Econometrica 57, 403–422.

[47] Dutta, B. and D. Ray (1991): Constrained egalitarian allocations, Games and Economic Behavior 3, 403–422.

[48] Ford, L.R. and D.R. Fulkerson (1956): Maximal flow through a network, Canadian Journal of Mathematics 8, 399–404.

[49] Faigle, U. and W. Kern (1992): The Shapley value for cooperative games under precedence constraints, International Journal of Game Theory 21, 249–266.

[50] Fukuda, E., S. Ishihara, S. Muto, S. Tijs, and R. Branzei (2005): Cooperative fuzzy games arising from economic situations, Fuzzy Economic Review 10, 3–15.

[51] Gerard-Varet, L.A. and S. Zamir (1987): Remarks on the set of reasonable outcomes in a general coalition function form game, International Journal of Game Theory 16, 123–143.

[52] Gillies, D.B. (1953): Some Theorems on n-person Games, Ph.D. Thesis, Princeton University Press, Princeton.

[53] Grabisch, M. and F. Lange (2007): Games on lattices, multichoice games and the Shapley value: A new approach, Mathematical Methods of Operations Research 65, 153–167.

[54] Grabisch, M. and L. Xie (2007): A new investigation about the core and the Weber set of multichoice games, Mathematics of Operations Research, forthcoming.

[55] Harsanyi, J. (1959): A bargaining model for the cooperative n-person game, Annals of Mathematics Study 40, 325–355.

[56] Hart, S. and A. Mas-Colell (1989): Potential, value and consistency, Econometrica 57, 589–614.

[57] van Heumen, H. (1984): The μ-Value: A Solution Concept for Cooperative Games, Master Thesis, University of Nijmegen (in Dutch).

[58] Hokari, T. (2000): Population monotonic solutions for convex games, International Journal of Game Theory 29, 327–338.

[59] Hougaard, J., B. Peleg, and L. Thorlund-Petersen (2001): On the set of Lorenz-maximal imputations in the core of a balanced game, International Journal of Game Theory 30, 147–165.

[60] Hsiao, C.-R. and TES Raghavan (1992): Monotonicity and dummy free property for multi-choice cooperative games, International Journal of Game Theory 21, 301–312.

[61] Hsiao, C.-R. and TES Raghavan (1993): Shapley value for multi-choice cooperative games (I), Games and Economic Behavior 5, 240–256.

[62] Ichiishi, T. (1981): Super-modularity: Applications to convex games and to the greedy algorithm for LP, Journal of Economic Theory 25, 283–286.

[63] Kalai, E. and D. Samet (1987): On weighted Shapley values, International Journal of Game Theory 16, 205–222.

[64] Kalai, E. and E. Zemel (1982): Totally balanced games and games of flow, Mathematics of Operations Research 7, 476–479.

[65] Klijn, F., M. Slikker, and J. Zarzuelo (1999): Characterizations of a multi-choice value, International Journal of Game Theory 28, 521–532.

[66] Lebret, A. and A. Ziad (2001): Fuzzy cooperative games and politikac models, GEMMA Working Paper 2001–1, Université de Caen Basse-Normandie.

[67] Llerena, F. and Rafels, C. (2007): Convex decomposition of games and axiomatizations of the core and the D-core, International Journal of Game Theory 35, 603–615.

[68] Lucas, W. (1968): A game with no solution, Bulletin of the American Mathematical Society 74, 237–239.

[69] Luce, R. and H. Raiffa (1957): Games and Decisions, John Wiley & Sons.

[70] Martínez-de-Albéniz, F.J. and C. Rafels (2002): A note on Shapley's convex measure games, Mimeo, University of Barcelona.

[71] Martinez-Legaz, J.E. (2006): Some characterizations of convex games, in: A. Seeger (Ed.), Recent Advances in Optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 563, Springer Verlag, Heidelberg, pp. 293–303.

[72] Milnor, J.W. (1952): Reasonable outcomes for n-person games, Research Memorandum RM 916, The RAND Corporation, Santa Monica.

[73] Molina, E. and J. Tejada (2002): The equalizer and the lexicographical solutions for cooperative fuzzy games: characterization and properties, Fuzzy Sets and Systems 125, 369–387.

[74] Monderer, D., D. Samet, and L. Shapley (1992): Weighted Shapley values and the core, International Journal of Game Theory 21, 27—39.

[75] Moulin, H. (1995): On additive methods to share joint costs, Japanese Economic Review 46, 303–332.

[76] Muto, S., S. Ishihara, E. Fukuda, S. Tijs, and R. Branzei (2006): Generalized cores and stable sets for fuzzy games, International Game Theory Review 8, 95–109.

[77] Muto, S., M. Nakayama, J. Potters, and S. Tijs (1988): On big boss games, Economic Studies Quarterly 39, 303–321.

[78] von Neumann, J. and O. Morgenstern (1944): Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton.

[79] Nisan, N., T. Roughgarden, and E. Tardos (2007): Algorithmic Game Theory, Cambridge University Press.

[80] Nishizaki, I. and M. Sakawa (2001): Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution, Physica-Verlag, Heigelberg.

[81] Nouweland, van den, A. (1993): Games and Graphs in Economic Situations, PhD Thesis, Tilburg University.

[82] Nouweland, van den, A., J. Potters, S. Tijs, and J. Zarzuelo (1995): Cores and related solution concepts for multi-choice games, Mathematical Methods of Operations Research 41, 289–311.

[83] Owen, G. (1972): Multilinear extensions of games, Management Science 18, 64–79.

[84] Owen G. (1995): Game Theory, 3rd ed., Academic Press, San Diego.

[85] Peleg, B. (1986): On the reduced game property and its converse, International Journal of Game Theory 15, 187–200.

[86] Peleg, B. and P. Sudhölter (2004): Introduction to the Theory of Cooperative Games, Springer-Verlag, Heidelberg.

[87] Peleg, B. and P. Sudhölter (2007): Introduction to the Theory of Cooperative Games, 2nd ed., Springer-Verlag, Heidelberg.

[88] Peters, H. and H. Zank (2005): The egalitarian solution for multichoice games, Annals of Operations Research 137, 399–409.

[89] Potters, J., R. Poos, S. Tijs, and S. Muto (1989): Clan games, Games and Economic Behavior 1, 275–293.

[90] Rafels, C. and S. Tijs (1997): On cores of cooperative games and the stability of the Weber set, International Journal of Game Theory 26, 491–499.

[91] Rasmusen, E. (2007): An Introduction to Game Theory, 4th ed., Blackwell Publishing.

[92] Rawls, J. (1971): A Theory of Justice, Harvard University Press.

[93] Roth, A. (1988): The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley, Cambridge University Press, Cambridge.

[94] Ruiz, L.M., F. Valenciano, and J.M. Zarzuelo (1996): The least square prenucleolus and the least square nucleolus. Two values for TU games based on the excess vector, International Journal of Game Theory 25, 113–134.

[95] Sakawa, M. and I. Nishizaki (1994): A lexicographical concept in an n-person cooperative fuzzy game, Fuzzy Sets and Systems 61, 265–275.

[96] Schmeidler, D. (1969): The nucleolus of a characteristic function game, SIAM Journal of Applied Mathematics 17, 1163–1179.

[97] Schmeidler, D. (1972): Cores of exact games I, Journal of Mathematical Analysis and Applications 40, 214–225.

[98] Selten, R. (1972): Equal share analysis of characteristic function experiments, in: Sauermann, H. (Ed.), Contributions to Experimentation in Economics, Vol. 3, J.C.B. Mohr (Paul Siebeck), T¨ubingen, pp. 130–165.

[99] Sen, A.K. (1973): On Economic Inequality, Clarendon Press.

[100] Seo, F., M. Sakawa, and I. Nishizaki (1995): Cooperative Fuzzy Games for International Conflict Solving, Theory and Decision Library, Series D, Kluwer Academic Publishers.

[101] Shaked, M. and J.G. Shathikumar (1990): Parametric stochastic convexity and concavity of stochastic processes, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 42, 509–531.

[102] Shapley, L.S. (1953): A value for n-person games, Annals of Mathematics Studies 28, 307–317.

[103] Shapley, L.S. (1967): On balanced sets and cores, Naval Research Logistics Quarterly 14, 453–460.

[104] Shapley, L.S. (1971): Cores of convex games, International Journal of Game Theory 1, 11–26.

[105] Shapley, L. and M. Shubik (1969): On market games, Journal of Economic Theory 1, 9–25.

[106] Shapley, L. and M. Shubik (1975): Competitive Outcomes in the Cores of Market Games, International Journal of Game Theory 4, 229–237.

[107] Sprumont, Y. (1990): Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility, Games and Economic Behavior 2, 378–394.

[108] Tijs, S. (1981): Bounds for the core and the τ-value, in: Moeschlin, O. and D. Pallaschke (Eds.), Game Theory and Mathematical Economics, North-Holland, Amsterdam, pp. 123–132.

[109] Tijs, S. (1987): An axiomatization of the τ-value, Mathematical Social Sciences 13, 177–181.

[110] Tijs, S. (2003): Introduction to Game Theory, Hindustan Book Agency, New Delhi.

[111] Tijs, S. (2005): The first steps with Alexia, the average lexicographic value, CentER Discussion Paper 2005–123, Tilburg University.

[112] Tijs, S. and R. Branzei (2002): Additive stable solutions on perfect cones of cooperative games, International Journal of Game Theory 31, 469–474.

[113] Tijs, S. and R. Branzei (2004): Various characterizations of convex fuzzy games, TOP 12, 399—408.

[114] Tijs, S., R. Branzei, S. Ishihara, and S. Muto (2004): On cores and stable sets for fuzzy games, Fuzzy Sets and Systems 146, 285–296.

[115] Tijs, S., R. Branzei, S. Muto, S. Ishihara, and E. Fukuda (2004): Fuzzy clan games and bi-monotonic allocation rules, Fuzzy Sets and Systems 146, 271–284.

[116] Tijs, S. and F.A.S Lipperts (1982): The hypercube and the core cover of n-person cooperative games, Cahiers du Centre d'Études de Researche Opérationelle 24, 27–37.

[117] Tijs, S., A. Meca, and M.A. Lopez (2005): Benefit sharing in holding situations, European Journal of Operational Research 162, 251–269.

[118] Tijs, S. and G.J. Otten (1993): Compromise values in cooperative game theory, TOP 1, 1–51.

[119] Tsurumi, M., T. Tanino, and M. Inuiguchi (2000): The core and the related solution concepts in cooperative fuzzy games, Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems 12, 193–202.

[120] Tsurumi, M., T. Tanino, and M. Inuiguchi (2001): A Shapley function on a class of cooperative fuzzy games, European Journal of Operational Research 129, 596–618.

[121] Tsurumi, M., T. Tanino, and M. Inuiguchi (2004): Axiomatic characterizations of the Shapley function on a class of cooperative fuzzy games, Central European Journal of Operations Research 12, 47–57.

[122] Voorneveld, M., S. Tijs, and S. Grahn (2002): Monotonic allocation schemes in clan games, Mathematical Methods of Operations Research 56, 439–449.

[123] Webb, N.J. (2007): Game Theory. Decisions, Interaction and Evolution, Springer-Verlag, Heidelberg.

[124] Weber, R. (1988): Probabilistic values for games, in: Roth, A.E. (Ed.), The Shapley Value: Essays in Honour of Lloyd S. Shapley, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 101–119.

[125] Weiß, C. (1988): Die Erweiterung nach Choquet und der Shapley-Wert auf Fuzzy-Spielen, Master Thesis, University of Bielefeld.

[126] Weiß, C. (2003): Games with Fuzzy Coalitions: Concepts Based on the Choquet Extension, PhD Thesis, University of Bielefeld.

[127] Yanovskaya, E. (2006): Consistency of the egalitarian split-off set for TU and NTU games, Discussion Paper, St. Petersburg Institute for Economics and Mathematics, Russian Academy of Sciences.

[128] Young, H.P. (1985): Monotonic Solutions of Cooperative Games, International Journal of Game Theory 14, 65–72.

索　引

W

X

Y

Z

其他

《现代数学译丛》已出版书目

（按出版时间排序）

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007.12 〔德〕Andreas Enge 著 吴铤 董军武 王明强 译
2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008.1 〔美〕Steven Roman 著 邓欣雨 译
3 现代非参数统计 2008.5 〔美〕Larry Wasserman 著 吴喜之 译
4 最优化问题的扰动分析 2008.6 〔法〕J. Frédéric Bonnans 〔美〕Alexander Shapiro 著 张立卫 译
5 统计学完全教程 2008.6 〔美〕Larry Wasserman 著 张波 等译
6 应用偏微分方程 2008.7 〔英〕John Ockendon, Sam Howison, Andrew Lacey & Alexander Movchan 著 谭永基 程晋 蔡志杰 译
7 有向图的理论、算法及其应用 2009.1 〔丹〕J. 邦詹森 〔英〕G. 古廷 著 姚兵 张忠辅 译
8 微分方程的对称与积分方法 2009.1〔加〕乔治 W. 布卢曼 斯蒂芬 C. 安科 著 闫振亚 译
9 动力系统入门教程及最新发展概述 2009.8 〔美〕Boris Hasselblatt & Anatole Katok 著 朱玉峻 郑宏文 张金莲 阎欣华 译 胡虎翼 校
10 调和分析基础教程 2009.10 〔德〕Anton Deitmar 著 丁勇 译
11 应用分支理论基础 2009.12 〔俄〕尤里·阿·库兹涅佐夫 著 金成桴 译
12 多尺度计算方法——均匀化及平均化 2010.6 Grigorios A. Pavliotis, Andrew M. Stuart 著 郑健龙 李友云 钱国平 译
13 最优可靠性设计：基础与应用 2011.3 〔美〕Way Kuo, V. Rajendra Prasad, Frank A.Tillman, Ching-Lai Hwang 著 郭进利 闫春宁 译 史定华 校
14 非线性最优化基础 2011.4 〔日〕Masao Fukushima 著 林贵华 译
15 图像处理与分析：变分，PDE，小波及随机方法 2011.6 Tony F. Chan, Jianhong (Jackie) Shen 著 陈文斌，程晋 译
16 马氏过程 2011.6 〔日〕福岛正俊 竹田雅好 著 何萍 译 应坚刚 校

17 合作博弈理论模型　2011.7〔罗〕Rodica Branzei〔德〕Dinko Dimitrov〔荷〕Stef　Tijs　著　刘小冬 刘九强　译

www.sciencep.com



科学出版中心　数理分社
电话：(010)64033664
E-mail: math-phy@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等数学；管理科学

定 价：46.00 元